

Современный
Гуманитарный
Университет

Дистанционное образование

0661.01.01;1

Рабочий учебник

Фамилия, имя, отчество _____

Факультет _____

Номер контракта _____

ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

ЮНИТА 1

**ВВЕДЕНИЕ В ТЕОРИЮ ФУНКЦИЙ
КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО**

Москва 2001

ОГЛАВЛЕНИЕ

	стр.
ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН	4
ЛИТЕРАТУРА	5
ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ	6
ТЕМАТИЧЕСКИЙ ОБЗОР	9
Введение	9
Глава I. Комплексные числа и действия над ними	11
§1. Комплексные числа	11
§2. Действия над комплексными числами	13
Глава II. Понятие функции комплексного переменного	24
§3. Плоскость комплексного переменного	24
§4. Последовательности комплексных чисел и пределы последовательностей	27
§5. Предел и непрерывность функции комплексного переменного	30
Глава III. Дифференцирование функций комплексного переменного	36
§6. Производная и дифференциал. Условия Коши-Римана. Аналитические функции	36
§7. Связь между аналитическими и гармоническими функциями	42
§8. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения	45
Глава IV. Конформные отображения	50
§9. Линейная и дробно-линейная функции	50
§10. Степенная функция. Понятие римановой поверхности ..	64
§11. Показательная и логарифмическая функции	70
§12. Общая степенная и тригонометрические функции	75
§13. Общие свойства конформных отображений	80
Глава V. Интегрирование функций комплексного переменного ..	85
§14. Интеграл от функции комплексного переменного	85
§15. Теорема Коши	90
§16. Неопределенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница ..	95
§17. Интегральная формула Коши и ее следствия	101
ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ	109
ТРЕНИНГ УМЕНИЙ	114
ФАЙЛ МАТЕРИАЛОВ	154
ГЛОССАРИЙ*	

* Глоссарий расположен в середине учебного пособия и предназначен для самостоятельного заучивания новых понятий.

ДИДАКТИЧЕСКИЙ ПЛАН

Комплексные числа. Действия над комплексными числами. Плоскость комплексного переменного. Последовательности комплексных чисел и пределы последовательностей.

Понятие функции комплексного переменного. Производная и дифференциал. Условия Коши-Римана. Аналитические функции. Связь между аналитическими и гармоническими функциями.

Геометрический смысл производной функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения. Линейная и дробно-линейные функции. Степенная функция. Понятие римановой поверхности. Показательная и логарифмическая функции. Общая степенная и тригонометрические функции. Общие свойства конформных отображений.

Интеграл от функции комплексного переменного. Теорема Коши. Неопределенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница. Интегральная формула Коши и ее следствия.

ЛИТЕРАТУРА

Базовая

1. Соломенцев Е.Д. Функции комплексного переменного и их применения. М.: Высшая школа, 1988.

Дополнительная

2. Араманович И.Г., Лунц Г.Л., Эльсгольц Л.Э. Функции комплексного переменного. Операционное исчисление. Теория устойчивости. М.: Наука, 1965.

3. Фукс Б.А., Шабат Б.В. Функции комплексного переменного и некоторые их приложения. М.: ГИФМЛ, 1959.

4. Свешников А.Г., Тихонов А.Н. Теория функций комплексной переменной. М.: Наука, 1979.

5. Маркушевич А.И. Краткий курс теории аналитических функций. М.: ГИТТЛ, 1957.

6. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.

7. Сидоров Ю.В., Федорюк М.В., Шабунин М.И. Лекции по теории аналитических функций. М.: Наука, 1982.

8. Бицадзе А.В. Основы теории аналитических функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.

9. Привалов И.И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.: Наука, 1984.

10. Евграфов М.А. Аналитические функции. М.: Наука, 1965.

11. Шабат Б.В. Введение в комплексный анализ. Ч.1. М.: Наука, 1985.

12. Глаголева Р.Я. Интегральное исчисление функции одной и нескольких переменных. Математический анализ. Юнита 2. М.: СГУ, 2000.

Примечание. Знаком (*) отмечены работы, использованные при составлении тематического обзора.

ПЕРЕЧЕНЬ УМЕНИЙ

№ п/п	Умение	Алгоритмы
1	Вычисление значений арифметических выражений, включающих возведение в n -ю степень и извлечение корня n -й степени	1. Определить порядок действий по обычным правилам: сначала действия возведения в степень, затем умножения и деления, потом – сложения и вычитания; при наличии скобок вначале выполняются действия в скобках. 2. Число $z = x + iy$, которое возводится в степень или из которого извлекается корень, представить в тригонометрической форме, используя формулы $r = z = \sqrt{x^2 + y^2}$; $\cos \varphi = x/r$; $\sin \varphi = y/r$. 3. Возвести в степень или извлечь корень n-й степени, применив формулы Муавра (при возведении в квадрат или куб удобнее применять алгебраические формулы сокращенного умножения). 4. Выполнить умножение и деление чисел либо в тригонометрической, либо в алгебраической форме. При делении чисел в алгебраической форме следует домножить числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю. 5. Выполнить сложение и вычитание чисел в алгебраической форме.
2	Изображение области на комплексной плоскости, заданной системой неравенств	1. Изобразить множество $z - z_0 < R$. Это множество таких точек z , расстояние от которых до точки z_0 не превосходит R , т.е. круг с центром в z_0 и радиусом R . 2. Изобразить множество $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$ – сектор, ограниченный лучами, идущими под углом φ_1 и φ_2 к оси OX .

№ п/п	Умение	Алгоритмы
		3. Изобразить множество $x_1 < \operatorname{Re} z < x_2$, $y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$. 4. Найти пересечение этих множеств.
3	Восстановление аналитической функции по ее действительной или мнимой части и значению в заданной точке	Пусть для определенности задана действительная часть $u(x, y)$. 1. Проверить, что заданная функция в самом деле является действительной частью аналитической функции. С этой целью подставить u в уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0.$ 2. Используя условия Коши-Римана, найти $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}.$ 3. Интегрируя последнее уравнение по x, найти $v(x, y)$ (при этом y считается постоянной): $v(x, y) = -\int \frac{\partial u}{\partial y} dx = F(x, y) + C(y),$ где $C(y)$ – неизвестная функция переменной y. 4. Подставить найденную функцию в уравнение $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ и найти $C'(y)$. 5. Найти $C(y)$, проинтегрировав $C'(y)$ по y. При этом $C(y)$ найдется с точностью до постоянного слагаемого C_1.

№ п/п	Умение	Алгоритмы
		6. Записать $f(z)$ в виде $f(z) = u(z) + iv(z) + C_1$ и найти C_1 из условия $f(z_0) = w_0$
4	Вычисление интеграла по кривой	1. Задать кривую уравнением вида $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Если кривая состоит из нескольких участков, задаваемых разными уравнениями, то рассмотреть каждый участок отдельно. 2. Найти производную $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$. 3. Найти интеграл по кривой AB по формуле $\int_{AB} f(z) dz = \int_{AB} (u(z) + iv(z)) dz =$ $= \int_{\alpha}^{\beta} (u(x(t), y(t)) + iv(x(t), y(t))) (x'(t) + iy'(t)) dt.$ Для этого раскрыть скобки, перейти к сумме интегралов и вычислить каждый из них. Прodelать аналогичные вычисления для каждого из участков кривой. 4. Сложить полученные значения интегралов.
5	Нахождение конформного отображения произвольной полосы на единичный круг	1. Отобразить данную полосу на полосу $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \pi$ с помощью линейной функции $w = az + b$. 2. Отобразить полученную полосу на верхнюю полуплоскость с помощью функции $w = e^z$. 3. Отобразить верхнюю полуплоскость на единичный круг с помощью дробно-линейного отображения. 4. Составить композицию указанных выше отображений.

ВВЕДЕНИЕ

В процессе развития человечества, усложнения практической деятельности людей возникала необходимость во все более широких классах чисел. Так, потребность в счете предметов привела к возникновению понятия натурального, т.е. целого положительного числа. Следует отметить, что понятие это возникло не сразу; процесс его формирования занял не одно столетие. Для измерения величин понадобились дробные числа. Развитие алгебры, необходимость решать линейные и квадратные уравнения привели к введению отрицательных чисел (с ними уже свободно оперировал Диофант в III в.н.э.). Тем самым были введены рациональные числа – числа, представимые в виде отношения двух целых чисел, т.е. целые, дробные числа (как положительные, так и отрицательные) и нуль. К необходимости расширения класса дробных чисел подошли еще древние греки, обнаружившие, что не всегда длина отрезка может быть выражена рациональным числом, если за единицу принят другой отрезок (например, диагональ квадрата не выражается рациональным числом, если за единицу принята его сторона). Числа, не являющиеся рациональными (т.е. не представимые в виде отношения двух целых чисел), называются иррациональными. Совокупность рациональных и иррациональных чисел образует множество действительных (или вещественных) чисел. Каждому действительному числу соответствует точка на числовой прямой и, наоборот, каждой точке на числовой прямой соответствует действительное число. Таким образом, действительные числа “заполняют” всю числовую прямую.

Оперировать с “новыми” числами, квадрат которых меньше нуля, первыми начали, по-видимому, итальянские математики XVI в. Кардано и Бомбелли. Они пришли к необходимости введения таких необычных объектов, разрабатывая методы решения кубических уравнений. Как известно, квадрат любого действительного числа больше либо равен нулю. Поэтому к этим “новым” числам и к включающему их более широкому классу объектов – комплексным числам – долгое время относились с большим недоверием (впрочем, еще в XVI-XVII вв. многие европейские математики не признавали и отрицательных чисел, называя их ложными, невозможными). Это недоверие к комплексным числам рассеялось лишь в конце XVIII в. после знаменитых работ Эйлера и Гаусса и геометрического истолкования комплексных чисел как точек на плоскости. Такая геометрическая интерпретация показывает, что между действительными и комплексными числами нет принципиальной разницы: и те, и другие изображаются точками на плоскости, только

* Жирным шрифтом выделены новые понятия, которые необходимо усвоить. Знание этих понятий будет проверяться при тестировании.

действительным числам соответствуют точки на оси OX , а комплексным – все точки на плоскости; действия над действительными и комплексными числами обладают одними и теми же основными свойствами и выполняются по единым правилам. Таким образом, множество действительных чисел является составной частью множества комплексных чисел.

Комплексные числа придают ясность и законченность многим разделам классического анализа. Они позволяют решать ряд задач, в которых, казалось бы, комплексные числа отсутствуют. Одна из таких задач – вычисление несобственных интегралов – будет рассмотрена в дальнейшем. Комплексные числа используются при математическом описании многих процессов в физике и технике (в гидродинамике, аэромеханике, электротехнике, теории упругости и т.д.). Развитая теория и разнообразные применения давно “уравняли в правах” действительные и комплексные числа. О былом недоверии напоминают лишь некоторые сохранившиеся термины.

ГЛАВА I. КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

§1. Комплексные числа

Комплексным числом z называется упорядоченная пара (x, y) действительных чисел x и y . Упорядоченность пары (x, y) означает, что при $x \neq y$ пара (x, y) отлична от пары (y, x) , т.е. важны не только значения чисел x и y , составляющих пару, но и порядок, в котором эти числа расположены.

Комплексные числа имеют простой геометрический смысл. Возьмем на плоскости прямоугольную декартову систему координат

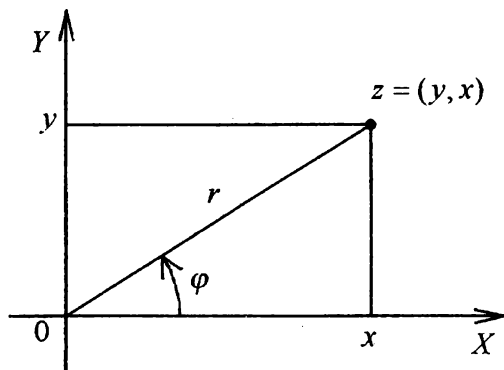


Рис. 1

XOY (рис.1). Тогда каждой паре $z = (x, y)$ действительных чисел соответствует точка на плоскости с координатами (x, y) , и, наоборот, каждой точке на плоскости соответствует пара действительных чисел, т.е. комплексное число $z = (x, y)$. Первая компонента x комплексного числа $z = (x, y)$

называется *действительной*, или *вещественной частью* числа z и обозначается $x = \operatorname{Re} z$; вторая компонента y называется *мнимой частью* числа z и обозначается $y = \operatorname{Im} z$. (Термины *действительная* и *мнимая часть* напоминают о непрестом развитии теории комплексных чисел; теперь нам известно, что первая координата точки z не более "вещественна", чем вторая.) Плоскость, точки которой изображают комплексные числа, называется *комплексной плоскостью* и обозначается через C .

Два комплексных числа $z_1 = (x_1, y_1)$ и $z_2 = (x_2, y_2)$ считаются равными, если $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, т.е. если соответствующие точки z_1 и z_2 на плоскости совпадают.

Комплексные числа $z = (x, 0)$ изображаются точками на оси OX ,

как и действительные числа. Поэтому ось OX называется *действительной осью*, а числа $z = (x, 0)$ часто обозначаются просто через x : $z = (x, 0) = x$. В частности, $z = (0, 0) = 0$.

Комплексные числа $z = (0, y)$ изображаются точками на оси OY . Эта ось (в дань исторической традиции) называется *мнимой осью*, а числа $z = (0, y)$ – *чисто мнимыми*. Комплексное число $(0, 1)$ называется *мнимой единицей* и обозначается через i : $i = (0, 1)$ (рис.2).

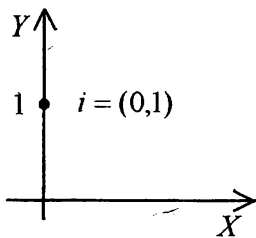


Рис.2

Иногда удобно представлять комплексное число $z = (x, y)$ в виде вектора $\overrightarrow{Oz}$ с координатами (x, y) , исходящего из начала координат (т.е. в виде радиус-вектора точки z).

Длина этого вектора называется **модулем комплексного числа z** и обозначается через $|z|$. Таким образом, $|z|$ равен расстоянию от точки z до начала координат. По теореме Пифагора (см. рис.1)

$$r = |z| = \sqrt{x^2 + y^2}. \quad (1.1)$$

Угол φ между положительным направлением оси OX и вектором $\overrightarrow{Oz}$, отсчитанный против часовой стрелки, называется **аргументом комплексного числа z** и обозначается через $\text{Arg} z$. Для числа $z = 0$ значение $\text{Arg} z$ не определено. Очевидно (см. рис.1), что

$$x = r \cos \varphi, \quad y = r \sin \varphi, \quad (1.2)$$

откуда

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad \sin \varphi = \frac{y}{r} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}. \quad (1.3)$$

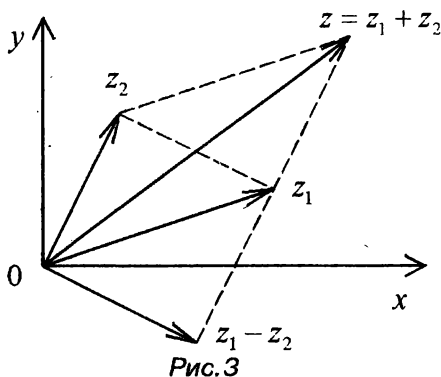
Значение $\text{Arg} z$ определяется по числу z неоднозначно, лишь с точностью до слагаемого $2\pi n$, где n – целое число. Удобно ввести **главное значение аргумента числа z** – значение аргумента, удовлетворяющее неравенству $-\pi < \varphi \leq \pi$. Главное значение аргумента числа z обозначается через $\arg z$. В дальнейшем вектор

$\overline{Oz}$ мы часто будем обозначать также просто z .

§2. Действия над комплексными числами

1. Сумма, разность комплексных чисел и умножение комплексного числа на действительное число определяются точно так же, как действия над соответствующими векторами. Пусть $z_1 = (x_1, y_1)$, $z_2 = (x_2, y_2)$ (рис.3).

Суммой комплексных чисел z_1 и z_2 называется комплексное число $z = z_1 + z_2 = (x_1 + x_2, y_1 + y_2)$.



Разностью комплексных чисел называется комплексное число

$$z = z_1 - z_2 = (x_1 - x_2, y_1 - y_2).$$

Таким образом, при сложении и вычитании комплексных чисел соответственно складываются или вычитаются их действительные и мнимые части.

Из рис.3 видно, что $|z_1 - z_2|$ равен расстоянию между точками z_1 и z_2 .

Произведением комплексного числа $z = (x, y)$ на действительное число λ называется комплексное число $\lambda z = (\lambda x, \lambda y)$.

Так как (см. рис.3) сторона Oz треугольника Ozz_1 не меньше суммы двух других его сторон, то справедливо так называемое неравенство треугольника:

$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$

Теперь мы можем ввести другую форму записи комплексного числа $z = (x, y)$. Так как $(x, 0) = x$, $(0, y) = (0, 1) \cdot y = iy$, то

$$z = (x, y) = (x, 0) + (0, y) = x + iy.$$

Выражение $z = x + iy$ называется **алгебраической, или декартовой, формой комплексного числа z** . Сделав подстановку

по формулам (1.2), придем к выражению

$$z = r \cos \varphi + ir \sin \varphi = r(\cos \varphi + i \sin \varphi), \quad r = |z| \quad (2.1)$$

которое называется **тригонометрической формой комплексного числа z** .

Пример 2.1. Комплексное число $z = -2 + 2\sqrt{3}i$ представить в тригонометрической форме (рис.4).

Решение. Здесь $x = -2$, $y = 2\sqrt{3}$. По формуле (1.1)

$$r = \sqrt{(-2)^2 + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4+12} = 4.$$

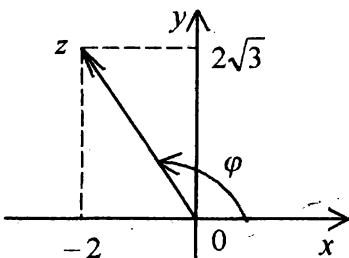


Рис.4

По формулам (1.3)

$$\cos \varphi = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Так как $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$, то

$$\varphi = \pm \arccos\left(-\frac{1}{2}\right) + 2\pi k, \text{ т.е.}$$

$$\varphi = \pm \frac{2}{3}\pi + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

где $\mathbb{Z}$ – множество целых чисел $(0, \pm 1, \pm 2, \dots)$.

Поскольку φ принадлежит четверти II (см. рис.4), то

$\varphi = \text{Arg}z = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$, а главное значение аргумента $\varphi = \frac{2}{3}\pi$. Поэтому

число z в тригонометрической форме имеет вид

$$z = 4\left(\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}\right).$$

Можно использовать и другие значения $\text{Arg}z$:

$$z = 4\left(\cos\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right) + i \sin\left(\frac{2\pi}{3} + 2\pi k\right)\right), \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

2. Рассмотрим теперь операцию умножения комплексных чисел.

Вначале вводится произведение $i \cdot i = i^2$. По определению,

$$i^2 = -1. \quad (2.2)$$

Обратим внимание читателя на принципиальную важность этого определения. Как известно, квадрат любого действительного числа (изображаемого точкой на оси OX) будет больше нуля либо равен нулю. Но среди более широкого класса объектов – комплексных чисел – уже найдутся такие, квадрат которых отрицателен. Для таких чисел соответствующие точки должны лежать вне оси OX .

Теперь произведение двух произвольных комплексных чисел $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$, записанных в алгебраической форме, определяется следующим образом. Следует раскрыть скобки по обычным алгебраическим правилам и упростить полученное выражение, пользуясь равенством $i^2 = -1$:

$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = x_1x_2 + iy_1x_2 + ix_1y_2 + i^2y_1y_2 = \\ &= (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2). \end{aligned}$$

Итак, $z_1 \cdot z_2 = (x_1 + iy_1)(x_2 + iy_2) = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + y_1x_2)$. Но лучше не запоминать эту формулу, а выполнять указанные выше действия непосредственно.

Пример 2.2. Найти произведение чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 + i$.

$$\begin{aligned} \text{Решение. } z_1 \cdot z_2 &= (2 - 3i)(-4 + i) = -2 \cdot 4 + 3 \cdot 4 \cdot i + 2 \cdot i - 3 \cdot i \cdot i = \\ &= -8 + 12i + 2i + 3 = -5 + 14i. \end{aligned}$$

Из определения суммы и произведения комплексных чисел следует, что эти операции обладают теми же свойствами, что и соответствующие операции над действительными числами:

$$z_1 + z_2 = z_2 + z_1;$$

$$z_1 \cdot z_2 = z_2 \cdot z_1;$$

$$z_1(z_2 + z_3) = z_1z_2 + z_1z_3;$$

$$z_1(z_2 \cdot z_3) = (z_1 \cdot z_2) \cdot z_3.$$

Отсюда следует, в частности, что при действиях над комплексными числами применимы все формулы сокращенного умножения. Например,

$$(z_1 + z_2)^2 = z_1^2 + 2z_1z_2 + z_2^2, \quad (z_1 + z_2)(z_1 - z_2) = z_1^2 - z_2^2, \quad \text{и т.д.}$$

В частности,

$$(x+iy)(x-iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2. \quad (2.3)$$

Два комплексных числа, у которых действительные части равны, а мнимые отличаются только знаком, называются **взаимно сопряженными комплексными числами**. Если $z = x + iy$, то сопряженное число обозначается $\bar{z} = x - iy$. Точки, изображающие числа z и $\bar{z}$, симметричны относительно действительной оси (рис.5).

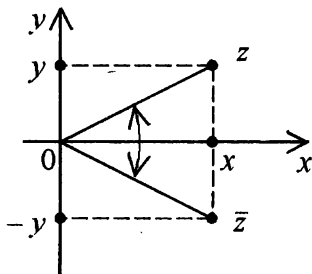


Рис.5

Нетрудно видеть, что

$|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\arg z = -\arg \bar{z}$ (кроме чисел $z = x < 0$; для них $\arg z = \arg \bar{z} = \pi$).
В силу (2.3)

$$z \cdot \bar{z} = x^2 + y^2 = |z|^2 \quad (2.4)$$

3. Деление комплексных чисел, так же, как и для действительных чисел, определяется как действие, обратное умножению. Делить можно только на комплексные числа, отличные от нуля. Чтобы найти **частное комплексных чисел** z_1 / z_2 , заданных в алгебраической форме, следует домножить числитель и знаменатель дроби на $\bar{z}_2$ и воспользоваться равенством (2.4):

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{x_1 + iy_1}{x_2 + iy_2} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{(x_2 + iy_2)(x_2 - iy_2)} = \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2}.$$

После этого нужно выполнить умножение в числителе и разделить действительную и мнимую части получившегося числа на знаменатель:

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{(x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \frac{(x_1x_2 + y_1y_2) + i(y_1x_2 - x_1y_2)}{x_2^2 + y_2^2} = \\ &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i \frac{y_1x_2 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2}. \end{aligned}$$

Как и в случае умножения, мы рекомендуем не запоминать эту формулу, а усвоить правило нахождения частного.

Пример 2.3. Найти частное чисел $z_1 = 2 - 3i$ и $z_2 = -4 + i$.

Решение.
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2 - 3i}{-4 + i} = \frac{(2 - 3i)(-4 - i)}{(-4 + i)(-4 - i)} = \frac{-8 + 12i - 2i - 3}{(-4)^2 + (1)^2} =$$

$$= \frac{-11+10i}{17} = -\frac{11}{17} + \frac{10}{17}i.$$

4. Рассмотрим теперь умножение и деление комплексных чисел, заданных в тригонометрической форме. Пусть

$$z_1 = r_1(\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1), \quad z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2),$$

где $r_1 = |z_1|$, $r_2 = |z_2|$. Тогда

$$\begin{aligned} z_1 z_2 &= r_1 \cdot r_2 ((\cos \varphi_1 \cdot \cos \varphi_2 - \sin \varphi_1 \sin \varphi_2) + i(\sin \varphi_1 \cos \varphi_2 + \\ &+ \cos \varphi_1 \sin \varphi_2)) = r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2)). \end{aligned} \quad (2.4')$$

Таким образом, при умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются:

$$|z_1 z_2| = |z_1| |z_2|, \quad (2.5)$$

$$\text{Arg}(z_1 z_2) = \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2.$$

Эти формулы означают, что вектор $z_1 z_2$ получается из вектора z_1 поворотом на угол φ_2 и умножением его длины на $|z_2|$. Например, умножение числа z на i дает вектор, который получается из вектора z поворотом на угол $\pi/2$ против часовой стрелки, так как $\arg i = \pi/2$, $|i| = 1$.

Из формул (2.5) следует, что аналогичными свойствами обладает произведение любого конечного числа комплексных чисел. Например,

$$\begin{aligned} |z_1 \cdot z_2 \cdot z_3| &= |(z_1 z_2) \cdot z_3| = |z_1 z_2| |z_3| = |z_1| |z_2| |z_3|; \\ \text{Arg}(z_1 \cdot z_2 \cdot z_3) &= \text{Arg}((z_1 z_2) \cdot z_3) = \text{Arg}(z_1 z_2) + \text{Arg} z_3 = \\ &= \text{Arg} z_1 + \text{Arg} z_2 + \text{Arg} z_3. \end{aligned}$$

$$\text{В частности, } |z^n| = \underbrace{|z \cdot z \cdot \dots \cdot z|}_{n \text{ раз}} = |z|^n = r^n;$$

$$\text{Arg}(z^n) = n \text{Arg} z.$$

Поэтому

$$z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi). \quad (2.6)$$

Перейдем теперь к делению чисел z_1, z_2 , заданных в тригонометрической форме. Заметим, что если $z_2 = r_2(\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$,

$$\text{то } \bar{z}_2 = r_2(\cos(-\varphi_2) + i \sin(-\varphi_2)). \text{ Поэтому } \frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} = \\ = \frac{r_1 r_2 (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))}{r_2^2}, \text{ откуда}$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} (\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2)). \quad (2.6')$$

Итак, модуль частного комплексных чисел равен частному их модулей, а аргумент частного равен разности аргументов делимого и делителя:

$$\left| \frac{z_1}{z_2} \right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \operatorname{Arg} \frac{z_1}{z_2} = \operatorname{Arg} z_1 - \operatorname{Arg} z_2, \text{ если } z_2 \neq 0.$$

В частности, если $z_1 = 1 = 1 \cdot (\cos 0 + i \sin 0)$, $z_2 = z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi)$, то

$$z^{-n} = \frac{1}{r^n} (\cos(-n\varphi) + i \sin(-n\varphi)). \quad (2.7)$$

Положим, по определению $z^0 = 1$ при $z \neq 0$. Тогда, исходя из формул (2.6) и (2.7), для любого целого числа m (положительного, отрицательного или равного нулю) справедливо равенство, называемое **формулой Муавра**:

$$z^m = r^m (\cos m\varphi + i \sin m\varphi). \quad (2.8)$$

Пример 2.4. Найти $(\sqrt{2} - \sqrt{6}i)^5$.

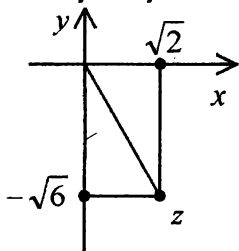


Рис. 6

Решение. 1) Запишем число $z = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$ в тригонометрической форме.

$$r = |z| = \sqrt{(\sqrt{2})^2 + (-\sqrt{6})^2} = \sqrt{2+6} = \sqrt{8};$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{2},$$

откуда $\varphi = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$.

Поскольку угол φ лежит в четверти IV (см. рис.6), то $\varphi = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$.

Можно взять главное значение аргумента $\varphi = -\frac{\pi}{3}$. Итак,

$$z = \sqrt{8} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right).$$

2) По формуле Муавра (2.8) найдем z^5 :

$$\begin{aligned} z^5 &= (\sqrt{8})^5 \left(\cos \left(-\frac{5\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{5\pi}{3} \right) \right) = 128\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \\ &= 128\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i \right) = 64\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}i) \end{aligned}$$

(мы воспользовались тем, что $-\frac{5\pi}{3} = \frac{\pi}{3} - 2\pi$).

5. Корнем степени n (n – натуральное число) из комплексного числа z называется такое комплексное число w , n -я степень которого равна z , т.е. $w^n = z$. Корень n -й степени из z обозначается $\sqrt[n]{z}$.

Пусть $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$. Комплексное число $w = \sqrt[n]{z}$ будем искать в виде $w = \rho(\cos \theta + i \sin \theta)$. Так как, по определению, $w^n = z$, то $|w^n| = |z|$, $\text{Arg} w^n = \text{Arg} z$. Отсюда

$$\rho^n = r; \quad n\theta = \varphi + 2\pi k; \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (2.9)$$

Так как r и ρ – неотрицательные числа, то равенство $\rho^n = r$ дает $\rho = \sqrt[n]{r}$, причем берется арифметическое (неотрицательное) значение корня. Второе равенство в (2.9) дает

$$\theta = \frac{\varphi + 2\pi k}{n}, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Таким образом,

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right), \quad (2.10)$$

где $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Подставляя в (2.10) значения $k = 0, 1, 2, \dots, n-1$, получим n различных значений корня n -й степени – чисел $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$. Для каждого из них $|w_k| = \sqrt[n]{r}$; поэтому соответствующие им точки расположены на окружности радиуса $\sqrt[n]{r}$ с центром в начале координат (рис.7). Аргументы $\theta_k = \frac{\varphi + 2\pi k}{n} = \frac{\varphi}{n} + \frac{2\pi}{n}k$ чисел w_k

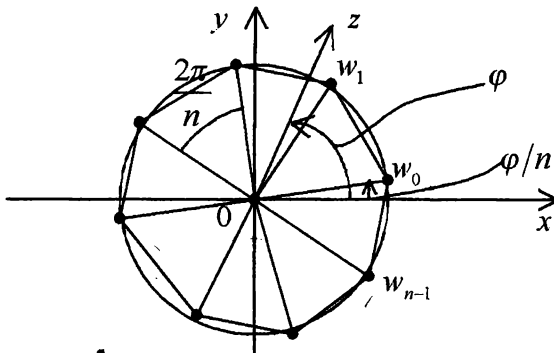


Рис.7

возрастают на $2\pi/n$ при увеличении k на единицу.

При $k = n$ получим

$$\theta_n = \frac{\varphi}{n} + 2\pi = \theta_0 + 2\pi.$$

Значит, точки w_n и w_0 совпадут. При

$k = n+1, n+2, \dots$ мы снова

будем получать точки w_1, w_2

и т.д. Аналогично, при $k = -1, -2, \dots$ соответствующие точки будут совпадать с какими-то из точек $w_0, w_1, \dots, w_{n-1}$. Исходя из изложенного, можно сделать следующий вывод.

Для каждого комплексного числа $z \neq 0$ имеется ровно n различных корней n -й степени из z . Все эти корни находятся по формуле (2.10) при $k = 0, 1, \dots, n-1$. Соответствующие точки расположены в вершинах правильного n -угольника с центром в начале координат.

Формула (2.10) также называется формулой Муавра.

Пример 2.5. Найти все значения $\sqrt[5]{z}$, при $z = 64\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}i)$.

Решение. Найдем модуль и аргумент числа z :

$$r = \sqrt{(64\sqrt{2})^2(1^2 + (\sqrt{3})^2)} = 2 \cdot 64\sqrt{2} = 128\sqrt{2} = 2^{\frac{15}{2}},$$

$$\cos \varphi = \frac{64\sqrt{2}}{128\sqrt{2}} = \frac{1}{2}; \quad \varphi = \pm \frac{\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Так как $\operatorname{Re} z > 0$ и $\operatorname{Im} z > 0$, то угол φ лежит в четверти I. Поэтому

$$\varphi = \frac{\pi}{3} + 2\pi k.$$

В (2.10) можно взять любое значение аргумента, в частности $\varphi = \frac{\pi}{3}$.

Подставляя найденные значения r и φ в формулу (2.10), получим

$$\sqrt[5]{64\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}i)} = \sqrt[5]{128\sqrt{2}} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{5} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{5} \right).$$

Подставляя значения $k = 0, 1, 2, 3, 4$, найдем пять различных значений $\sqrt[5]{z}$ (учитывая, что $\sqrt[5]{128\sqrt{2}} = \sqrt[5]{2^{\frac{15}{2}}} = 2^{\frac{3}{2}} = 2\sqrt{2}$):

$$w_0 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{15} + i \sin \frac{\pi}{15} \right), \quad w_1 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{15} + i \sin \frac{7\pi}{15} \right),$$

$$w_2 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{13\pi}{15} + i \sin \frac{13\pi}{15} \right), \quad w_3 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{19\pi}{15} + i \sin \frac{19\pi}{15} \right),$$

$$w_4 = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{25\pi}{15} + i \sin \frac{25\pi}{15} \right) = 2\sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) =$$

$$= 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{3} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{3} \right) \right) = 2\sqrt{2} \left(\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \sqrt{2} - \sqrt{6}i.$$

Handwritten notes on the right margin:

- 900 1 n.
- 1020
- 1030
- 1150 2 n.
- 1200 3 nara
- 1320 4 n
- 1350 5 n
- 1400
- 1500
- 1600
- 1750 6 n.

Остальные значения k новых точек w_k уже не дадут. Заметим, что, извлекая корень 5-й степени из числа $z = 64\sqrt{2}(1 + \sqrt{3}i)$, мы решали задачу, обратную той, которая разбиралась в примере 2.4, и корень $w_4 = \sqrt{2} - \sqrt{6}i$ оказался равным тому числу, которое возводилось в 5-ю степень. Но, кроме числа w_4 , будет еще 4 различных значений $\sqrt[5]{z}$; соответствующие точки $w_0, \dots, w_4$ расположены в вершинах правильного пятиугольника с центром в начале координат и удалены от начала координат на расстояние $2\sqrt{2}$.

Возможность извлекать корень из любого числа позволяет решать квадратные уравнения $az^2 + bz + c = 0$ с произвольными (вообще говоря, комплексными) коэффициентами a, b, c . Корни уравнения находятся по формуле

$$z_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad (2.11)$$

которая выводится так же, как и в случае действительных чисел a, b, c, z (путем выделения полного квадрата из квадратного трехчлена $az^2 + bz + c$). В качестве $\sqrt{b^2 - 4ac}$ можно взять любое из двух значений корня; эти значения связаны равенством $w_1 = -w_2$.

Пример 2.6. Решить уравнение $z^2 + 2z + 2 = 0$.

Решение. $D = b^2 - 4ac = 4 - 4 \cdot 1 \cdot 2 = 4 - 8 = -4$;

$$\sqrt{D} = \sqrt{-4} = \sqrt{-1 \cdot 4} = 2\sqrt{-1} = \pm 2i.$$

По формуле (2.11)

$$z_{1,2} = \frac{-2 \pm 2i}{2} = -1 \pm i;$$

$$z_1 = -1 + i; z_2 = -1 - i.$$

В школьном курсе математики считается, что если дискриминант $D < 0$, то корней нет. Их и в самом деле нет, если искать только действительные корни (т.е.

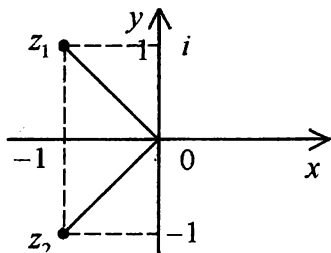


Рис.8

точки, расположенные на оси OX). Но среди более широкого множества комплексных чисел корни уже найдутся; соответствующие точки расположены вне действительной оси.

Таким образом, *каждое квадратное уравнение имеет ровно два корня (возможно, совпадающих)*. Позже мы докажем, что *для любого натурального n уравнение*

$$a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \dots + a_n = 0$$

имеет ровно n корней (вообще говоря, комплексных). Это означает, что для отыскания решений алгебраических уравнений более высокой степени не нужно дальнейшее расширение множества чисел (например, рассмотрение точек в пространстве и т.п.). Введенного множества комплексных чисел уже достаточно для того, чтобы среди них нашлись решения любого алгебраического уравнения.

* * *

В заключение главы I введем еще одну форму записи комплексных чисел. Определим показательную функцию от чисто мнимого аргумента $i\varphi$ следующим равенством:

$$e^{i\varphi} = \cos \varphi + i \sin \varphi. \quad (2.12)$$

Поскольку число z можно записать в виде $z = r(\cos \varphi + i \sin \varphi)$, где $r = |z|$, то получаем более краткую, так называемую **показательную форму комплексного числа**:

$$z = r e^{i\varphi}, \quad r = |z|.$$

Пусть $z_1 = r_1 e^{i\varphi_1}$, $z_2 = r_2 e^{i\varphi_2}$. Учитывая формулы (2.4'), (2.6) и (2.6'), получим:

$$r_1 \cdot r_2 e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)}, \text{ откуда } e^{i\varphi_1} \cdot e^{i\varphi_2} = e^{i(\varphi_1 + \varphi_2)};$$

$$(r e^{i\varphi})^n = z^n = r^n e^{in\varphi}, \text{ откуда } (e^{i\varphi})^n = e^{in\varphi}; \quad (2.13)$$

$$\frac{r_1 \cdot e^{i\varphi_1}}{r_2 \cdot e^{i\varphi_2}} = \frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}, \text{ откуда } \frac{e^{i\varphi_1}}{e^{i\varphi_2}} = e^{i(\varphi_1 - \varphi_2)}.$$

Таким образом, функция $e^{i\varphi}$, определенная равенством (2.12), обладает обычными свойствами показательной функции, что говорит о естественности такого определения. Формула (2.12) называется **формулой Эйлера**.

ГЛАВА II. ПОНЯТИЕ ФУНКЦИИ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§3. Плоскость комплексного переменного

Если x и y являются переменными величинами (т.е. могут принимать различные значения),

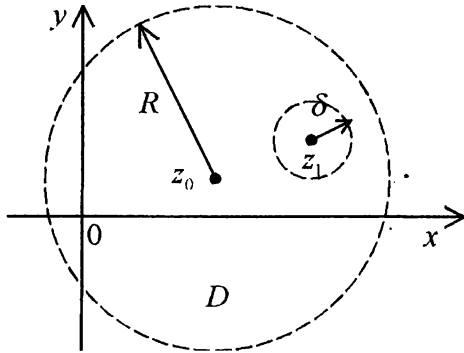


Рис.9

то $z = x + iy$ называется *комплексным переменным*. При изменении x и y соответствующая точка $z = x + iy$ пробегает некоторое множество точек комплексной плоскости C . Вся комплексная плоскость C называется также *плоскостью комплексного переменного* z (рис.9).

Расстояние $\rho(z_1, z_2)$ между

двумя точками $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ находится по формуле

$$\rho(z_1, z_2) = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2} = |z_1 - z_2|.$$

Поэтому уравнение окружности радиуса R с центром в точке z_0 имеет вид $|z - z_0| = R$, а множество точек z , лежащих внутри круга радиуса R с центром z_0 , задается неравенством $|z - z_0| < R$. Для фиксированной точки z_0 плоскости комплексного переменного и положительного числа δ множество всех точек z , удовлетворяющих неравенству $|z - z_0| < \delta$, является внутренностью круга радиуса δ с центром z_0 . Это множество называется δ -окрестностью точки z_0 .

Множество D точек называется *открытым*, если всякая его точка имеет окрестность, принадлежащую D (т.е. целиком состоящую из точек данного множества D). Например, множество $D = \{z : |z - z_0| < R\}$ (см.

рис.9) является открытым. Действительно, возьмем любую точку $z_1 \in D$.

Тогда $|z_1 - z_0| < R$, и $d = R - |z_1 - z_0| > 0$ будет расстоянием от z_1 до окружности $|z - z_0| = R$. Поэтому если $0 < \delta < d$, то множество $|z - z_0| < \delta$ лежит в D ; это и доказывает, что D – открыто.

Множество D называется *связным*, если любые две точки из D можно соединить непрерывной кривой, целиком лежащей в D . Открытое связное множество называется *областью*. Приведем примеры областей: круг $|z - z_0| < R$; кольцо $r < |z - z_0| < R$, $0 \leq r < R$; вся плоскость C ; полуплоскость $\operatorname{Re} z > a$, где a – действительное число. В то же время круг $|z - z_0| \leq R$ не является областью, так как это множество не является открытым: для точек z , для которых $|z - z_0| = R$, не существует окрестности, целиком лежащей в этом круге.

Точка z_1 называется *граничной точкой множества D* , если в любой окрестности точки z_1 найдутся как точки, принадлежащие множеству D , так и точки, ему не принадлежащие. Множество граничных точек называется *границей множества D* . Множество, состоящее из области D и всех граничных точек области D , называется *замкнутой областью* и обозначается $\bar{D}$. Например, круг $|z - z_0| \leq R$ и кольцо $r \leq |z - z_0| \leq R$ являются замкнутыми областями; но кольцо $r < |z - z_0| \leq R$ не является замкнутой областью и не является областью (так как это множество не будет открытым).

Области на плоскости C делятся на односвязные и многосвязные. Область называется *односвязной*, если ее граница состоит из одной непрерывной кривой без самопересечений (возможно, замкнутой). Например, круг $|z - z_0| < R$ и полуплоскость являются односвязными областями. Область, не являющаяся односвязной, называется *многосвязной*. В частности, многосвязная область называется *n -связной*, если ее граница состоит из n ($n > 1$) непересекающихся непрерывных кривых; некоторые из них могут вырождаться в точку.

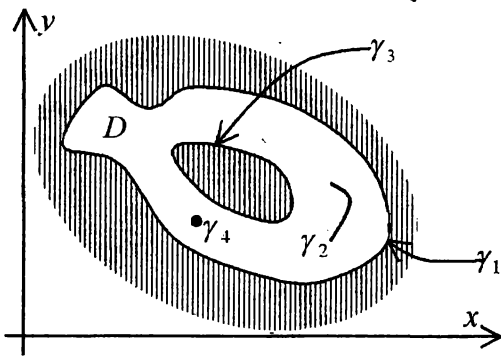


Рис. 10

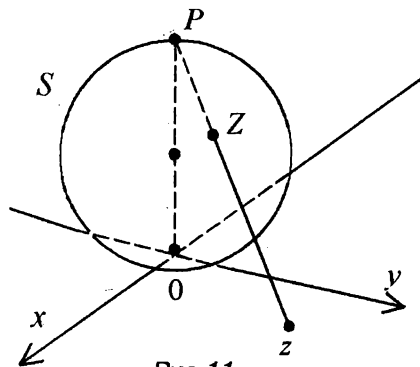


Рис. 11

Например, на рис.10 изображена 4-связная область D ; ее граница состоит из четырех кривых $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3, \gamma_4$.

Рассмотрим еще одну геометрическую интерпретацию комплексного числа (рис.11). Пусть S – сфера радиуса $1/2$, касающаяся комплексной плоскости C в точке $z=0$, и P – точка сферы, диаметрально противоположная точке O . Возьмем произвольную точку $z \in C$ и проведем луч Pz . Этот луч имеет единственную точку пересечения Z со сферой S ; очевидно, $Z \neq P$. Тем самым каждой точке $z \in C$ поставлена в соответствие точка $Z \in S$, $Z \neq P$. Наоборот, если задана точка $Z \in S$, $Z \neq P$, то аналогичное построение дает соответствующую точку $z \in C$. Тем самым мы построили взаимно однозначное соответствие между точками комплексной плоскости C и точками сферы S , отличными от P . Это соответствие называется *стереографической проекцией*. Нетрудно видеть, что если точки Z_n сферы приближаются к P , то соответствующие точки z_n плоскости C неограниченно удаляются от начала координат. Точке P не соответствует ни одна точка из C . Но мы введем в рассмотрение дополнительную (воображаемую) точку, которую назовем *бесконечно удаленной* и обозначим $z = \infty$. Эту точку $z = \infty$ мы и поставим в соответствие точке P . Комплексная плоскость C , дополненная бесконечно удаленной точкой, называется **расширенной комплексной плоскостью** и обозначается $\bar{C}$. Каждой

точке $z \in \overline{C}$ соответствует единственная точка $Z \in S$, и наоборот; сфера S называется *комплексной сферой*, или *сферой Римана*. Сфера Римана показывает, что точка $z = \infty$ и остальные точки из $\overline{C}$, называемые *конечными*, в некотором смысле равноправны: и те, и другие изображаются точками сферы S . Такое представление часто бывает удобным при рассмотрении, включающих бесконечно удаленную точку.

Можно доказать, что при стереографической проекции прямые и окружности на C переходят в окружности на S , углы между пересекающимися кривыми сохраняются.

Возьмем на сфере S некоторую окрестность точки P , т.е. сферическую шапочку с центром P . Точкам $Z \neq P$ этой окрестности будут соответствовать точки $z \in C$, лежащие вне некоторого круга с центром в начале координат. Это показывает естественность следующего определения. **Окрестностью бесконечно удаленной точки** называется множество, состоящее из точек $z \in C$, для которых $|z| > R$, и самой точки $z = \infty$, т.е. внешность круга радиуса R с центром в начале координат с добавлением самой точки $z = \infty$.

§4. Последовательности комплексных чисел и пределы последовательностей

Пусть каждому натуральному числу $n=1,2,\dots$ поставлено в соответствие комплексное число z_n . Тогда говорят, что задана *последовательность* $\{z_n\}$. Так как $z_n = x_n + iy_n$, то задание последовательности $\{z_n\}$ комплексных чисел равносильно заданию двух последовательностей $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ действительных чисел.

Комплексное число A называется **пределом последовательности** $\{z_n\}$, если для любого положительного числа ε найдется такой номер N (зависящий от ε), что при всех $n > N$ будет выполнено неравенство $|z_n - A| < \varepsilon$.

Выполнение этого условия означает, что для сколь угодно малой

ε -окрестности точки A все точки z_n с номерами $n > N$ попадут в эту окрестность, а вне ее останется лишь конечное число точек z_n . Последовательность, имеющая предел, называется *сходящейся*. Наличие предела A у последовательности $\{z_n\}$ записывается в виде $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$. Данное определение аналогично определению предела последовательности действительных чисел.

Теорема 4.1. Для того чтобы последовательность комплексных чисел $z_n = x_n + iy_n$ имела предел $A = a + ib$, необходимо и достаточно, чтобы последовательности $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ имели предел, причем $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$.

Доказательство. 1. Необходимость. Пусть дано, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$.

Надо доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$. Заметим, что

$$|z_n - A| = \sqrt{(x_n - a)^2 + (y_n - b)^2} \quad (4.1)$$

Отсюда следует, что

$$|x_n - a| \leq |z_n - A|; |y_n - b| \leq |z_n - A|. \quad (4.2)$$

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$, то найдется такой номер N , что при $n > N$ $|z_n - A| < \varepsilon$. Из (4.2) вытекает, что

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |y_n - b| < \varepsilon \quad \text{при } n > N.$$

По определению предела последовательности действительных чисел $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, что и требовалось доказать.

2. Достаточность. Предположим теперь, что $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$, и докажем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A = a + ib$.

Возьмем любое $\varepsilon > 0$. Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = a$, то найдется такой номер

N_1 , что при $n > N_1$ выполнено неравенство

$$|x_n - a| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}} \quad (4.3)$$

(мы пользуемся определением предела последовательности действительных чисел). Аналогично, из условия $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = b$ следует

существование такого номера N_2 , что при $n > N_2$

$$|y_n - b| < \frac{\varepsilon}{\sqrt{2}}. \quad (4.4)$$

Возьмем $N = \max\{N_1, N_2\}$. Тогда при $n > N$ будут выполняться оба неравенства (4.3), (4.4). Из равенства (4.1) получим

$$|z_n - A| < \sqrt{\frac{\varepsilon^2}{2} + \frac{\varepsilon^2}{2}} = \varepsilon \quad \text{при } n > N.$$

Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такой номер N , что при $n > N$ выполнено неравенство $|z_n - A| < \varepsilon$. Это и означает, что $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = A$.

Теорема 4.1 доказана.

Используя теорему 4.1 нетрудно показать, что сходящиеся последовательности комплексных чисел имеют те же свойства, что и сходящиеся последовательности действительных чисел:

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} (z_n + w_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_n + \lim_{n \rightarrow \infty} w_n; \\ \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot w_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} z_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} w_n; \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{z_n}{w_n} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} z_n}{\lim_{n \rightarrow \infty} w_n}, \quad \text{если } \lim_{n \rightarrow \infty} w_n \neq 0.$$

Вывод формул (4.5) из теоремы 4.1 и соответствующих свойств последовательностей действительных чисел предоставляем читателю.

Введенное выше понятие предела относилось к случаю, когда предел $A \neq \infty$. Рассмотрим теперь случай $A = \infty$, т.е. последовательности, стремящиеся к бесконечности.

Предел последовательности $\{z_n\}$ равен бесконечности (записывается $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$), если для любого сколь угодно большого числа $R > 0$ найдется такой номер N (зависящий от R), что при всех $n > N$ выполняется неравенство $|z_n| > R$.

Понятия бесконечно удаленной точки и ее окрестности, введенные в конце §3, позволяют переформулировать это определение следующим образом: $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, если для любой окрестности точки $A = \infty$ все точки

z_n с номерами $n > N$ попадут в эту окрестность. В таком виде определения конечного и бесконечного пределов аналогичны друг другу.

Упражнение. Докажите справедливость следующих утверждений:

1. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} z_n = \infty$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} |z_n| = \infty$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{z_n} = 0$.

2. Если $\lim_{n \rightarrow \infty} w_n = 0$ и $w_n \neq 0$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{w_n} = \infty$.

§5. Предел и непрерывность функции комплексного переменного

Пусть D – некоторое множество комплексных чисел.

Однозначной функцией комплексного переменного называется правило (закон), по которому каждому комплексному числу z из множества D соответствует единственное комплексное число w .

Такое соответствие обозначается $w = f(z)$, или $f: z \rightarrow w$. Множество D называется множеством (областью) определения функции f . Например, функция $w = z^2$ ставит в соответствие каждому комплексному числу $z = x + iy$ комплексное число $w = z^2 = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$; эта функция определена во всей плоскости комплексного переменного z , а если положить $f(\infty) = \infty$, то она будет определена и во всей расширенной плоскости.

Если обозначить $z = x + iy$, $w = u + iv$, то задание функции комплексного переменного $w = f(z)$ равносильно заданию на том же множестве двух функций действительных переменных x, y , принимающих действительные значения: $u = u(x, y)$, $v = v(x, y)$.

Наряду с плоскостью переменного $z = x + iy$ рассмотрим также плоскость комплексного переменного $w = u + iv$. Функция $w = f(z)$ каждой точке $z = x + iy$ множества D с координатами x, y ставит в соответствие вполне определенную точку $w = u + iv$ с координатами u, v ; когда точка z пробегает множество D на плоскости z , соответствующая точка w пробегает на плоскости w другое множество E . Таким образом, однозначная функция $w = f(z)$ отображает множество D на множество E , т.е. каждой точке $z \in D$ ставит в соответствие точку $w \in E$. Точка w называется *образом* точки z , а точка z – *прообразом* точки w при отображении $w = f(z)$. Точка w может иметь несколько (и даже бесконечно много) прообразов. Например, при отображении $w = z^n$ каждая точка $w \neq 0$ имеет ровно n прообразов – корней n -й степени из w .

Отсюда следует, что поведение функции комплексного переменного нельзя проиллюстрировать с помощью графика в декартовой системе координат, плоской или трехмерной. Чтобы представить себе геометрические свойства функции $w = f(z)$, нужно исследовать, в какие множества отображаются те или иные области и кривые.

Пример 5.1. Найти, в какую область отображается четверть круга радиуса R с помощью функции $w = z^2$ (рис.12).

Решение. Запишем переменные z и w в показательной форме:

$z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$. Так как $w = z^2$, то $\rho e^{i\theta} = (re^{i\varphi})^2 = r^2 e^{i2\varphi}$, откуда

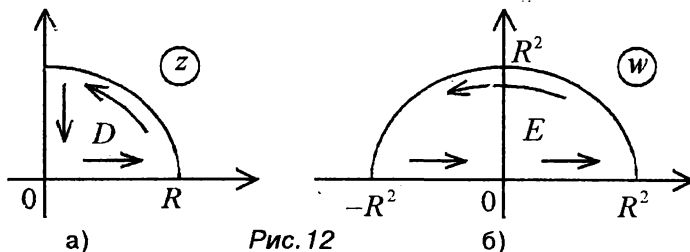


Рис.12
Современный Гуманитарный Университет

следует, что

$$\rho = r^2, \theta = 2\varphi \quad (5.1)$$

Выясним, в какую кривую переходит граница области D при отображении $w = z^2$. Предположим, что эта граница обходится начиная от точки $z = 0$ в положительном направлении (т.е. так, что при обходе область D остается слева). Из формул (5.1) следует, что отрезок действительной оси $0 \leq r \leq R, \varphi = 0$, перейдет в отрезок $0 \leq \rho \leq R^2, \theta = 0$ действительной оси плоскости переменной w ; четверть окружности $r = R, 0 \leq \varphi \leq \pi/2$ (рис.12а) перейдет в полуокружность $\rho = R^2, 0 \leq \theta \leq \pi$ (рис.12б) и, наконец, отрезок мнимой оси $0 \leq r \leq R, \varphi = \pi/2$ перейдет в отрезок $0 \leq \rho \leq R^2, \theta = \pi$, т.е. в отрезок $[-R^2, 0]$ действительной оси. Каждая внутренняя точка z четверти круга D перейдет во внутреннюю точку полукруга E на плоскости w , и при этом весь полукруг будет заполнен образами точек z полностью, без всяких "дырок".

Пример 5.2. Найти, в какую область отображается круг $|z| < R$ функцией $w = \frac{1}{z}$ (рис.13).

Решение. Как и в предыдущем примере, обозначим $z = re^{i\varphi}$, $w = \rho e^{i\theta}$.

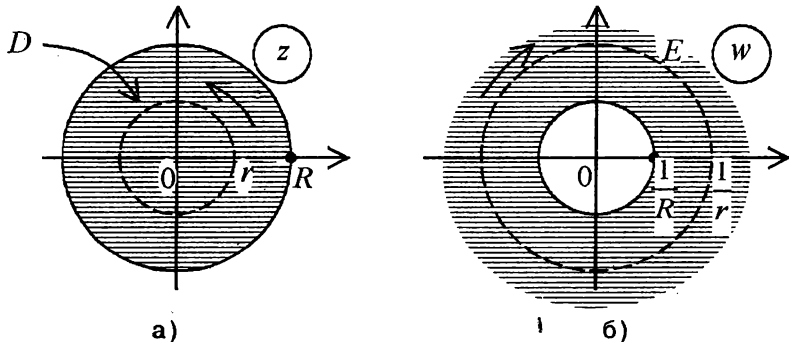


Рис.13

Тогда $w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi}$ (см. (2.13)). Поэтому

$$\rho = \frac{1}{r}, \quad \theta = -\varphi.$$

Возьмем окружность $|z| = r$, $r \leq R$ (рис.13а). Она перейдет в окружность $|w| = \frac{1}{r} \geq \frac{1}{R}$ (рис.13б). Поэтому круг $|z| < R$ отображается на внешность круга радиуса $\frac{1}{R}$, т.е. на множество $|w| > \frac{1}{R}$. При этом, если обходить окружность $|z| = r$ против часовой стрелки, то в силу равенства $\theta = -\varphi$ направление обхода соответствующей окружности $|w| = \frac{1}{r}$ будет противоположным.

Другие элементарные функции комплексного переменного будут рассмотрены в гл. 4.

Введем важное понятие предела функции $w = f(z)$ в точке. Пусть задана точка $z_0 \in \mathbb{C}$ и положительное число δ . *Проколотой δ -окрестностью точки z_0* называется δ -окрестность этой точки, за исключением самой точки z_0 (т.е. внутренности круга радиуса δ с центром z_0 , из которого удален центр z_0). Это множество можно записать в виде неравенств: $0 < |z - z_0| < \delta$.

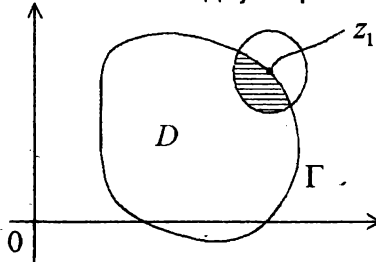
Пусть функция $w = f(z)$ определена в некоторой проколотой окрестности точки z_0 . Число A называется **пределом функции $w = f(z)$ в точке z_0** , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$ (зависящее от ε), что для всех точек проколотой δ -окрестности точки z_0 выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$.

То, что A является пределом функции $f(z)$ в точке z_0 , записывается в виде $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A$ и означает следующее: для любой (сколь угодно малой) окрестности U_A точки A найдется такая проколота окрестность точки z_0 , что для всех точек z из этой проколотой окрестности соответствующее значение $w = f(z)$ лежит в U_A .

В такой форме определение предела охватывает и случаи $z = \infty$ и (или) $A = \infty$; под проколотой окрестностью точки $z = \infty$ понимается множество $|z| > R$.

Данное определение предела аналогично определению предела для функций действительных переменных. Поэтому такие важные теоремы, как теоремы о пределе суммы, произведения, частного и т.д., сохраняют силу и для функций комплексного переменного. Если $z = x + iy$ и $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, то равенство $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = A = a + ib$

эквивалентно двум равенствам $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} u(x, y) = a$; $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} v(x, y) = b$, в



которых фигурируют пределы действительных функций $u(x, y)$, $v(x, y)$ двух действительных переменных x и y .

Дадим теперь определение предела функции в граничной точке области D (рис.14). Если функция $f(z)$

Рис.14

определена лишь в области D , то для

граничной точки z_1 не существует проколотой окрестности, в которой заданы значения $f(z)$; в этом состоит отличие от предыдущего случая.

Число A называется пределом функции $w = f(z)$ в граничной точке z_1 , если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех точек проколотой δ -окрестности точки z_1 , принадлежащих области D , выполняется неравенство $|f(z) - A| < \varepsilon$.

На рис.14 указанные точки из D отмечены штриховкой.

Перейдем к определению непрерывности функции комплексного переменного.

Функция $w = f(z)$, определенная в окрестности (не проколотой!) точки z_0 , называется **непрерывной в точке z_0** , если $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Непрерывность функции $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ эквивалентна непрерывности двух действительных функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ переменных x и y в точке (x_0, y_0) .

Функция $w = f(z)$, определенная в области D , называется **непрерывной в этой области**, если $f(z)$ непрерывна в каждой точке области D . Функция $w = f(z)$ называется **непрерывной в замкнутой области $\bar{D}$** , если она определена в $\bar{D}$ и для каждой точки $z_0 \in \bar{D}$ (включая граничные точки) выполнено равенство $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = f(z_0)$.

Зафиксируем точку z_0 и возьмем другую точку $z \in D$. Тем самым аргумент изменится на величину $\Delta z = z - z_0 = \Delta x + i\Delta y$, называемую **приращением аргумента**. Соответствующее изменение функции

$$\Delta w = f(z) - f(z_0) = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$$

называется **приращением функции**.

Упражнение. Покажите, что данное выше определение непрерывности функции в точке равносильно следующему: функция $w = f(z)$ называется непрерывной в точке z_0 , если

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \Delta w = 0.$$

ГЛАВА III. ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§6. Производная и дифференциал. Условия Коши-Римана. Аналитические функции

Производная и дифференциал. Определения производной и дифференциала функции комплексного переменного дословно совпадают с соответствующими определениями для функций одного действительного переменного.

Пусть функция $w = f(z) = u + iv$ определена в некоторой окрестности U точки z_0 . Дадим независимому переменному $z = x + iy$ приращение $\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, не выводящее за пределы окрестности U . Тогда функция $w = f(z)$ получит соответствующее приращение $\Delta w = f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)$.

Производной функции $w = f(z)$ в точке z_0 называется предел отношения приращения функции Δw к приращению аргумента Δz при стремлении Δz к нулю (произвольным образом).

Производная обозначается $f'(z)$, w' , $\frac{dw}{dz}$ или $\frac{df}{dz}$. Определение производной можно записать в виде:

$$f'(z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z}. \quad (6.1)$$

Предел в (6.1) может и не существовать; тогда говорят, что функция $w = f(z)$ не имеет производной в точке z_0 .

Функция $w = f(z)$ называется **дифференцируемой в точке z_0** , если она определена в некоторой окрестности U точки z_0 и ее приращение Δw можно представить в виде

$$\Delta w = A\Delta z + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z, \quad (6.2)$$

где комплексное число A не зависит от Δz , а $\alpha(\Delta z)$ – бесконечно малая при $\Delta z \rightarrow 0$, т.е. $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha(\Delta z) = 0$.

Так же, как и для функций действительного переменного, доказывается, что функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 тогда и только тогда, когда она имеет производную в z_0 , причем $A = f'(z_0)$.

Выражение $f'(z_0)\Delta z$ называется *дифференциалом функции $f(z)$ в точке z_0* и обозначается dw или $df(z_0)$. При этом приращение Δz независимого переменного z называется также дифференциалом переменного z и обозначается dz . Таким образом,

$$dw = df(z_0) = f'(z_0)dz.$$

Дифференциал есть линейная часть приращения функции.

Пример 6.1. Исследовать, имеет ли функция $w = f(z) = \operatorname{Re} z$ производную в произвольной точке z_0 .

Решение. По условию, $w = \operatorname{Re} z = x$. В силу определения производной, предел (6.1) не должен зависеть от того, по какому пути точка $z = z_0 + \Delta z$ приближается к z_0 при $\Delta z \rightarrow 0$.

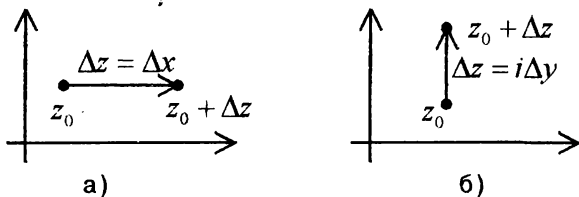


Рис. 15

Возьмем вначале $\Delta z = \Delta x$ (рис.15a). Так как $\Delta w = \Delta x$, то $\frac{\Delta w}{\Delta z} = \frac{\Delta x}{\Delta x} = 1$. Если же взять $\Delta z = i\Delta y$ (рис.15б), то $\Delta x = 0$ и, следовательно, $\Delta w = 0$, $\frac{\Delta w}{\Delta z} = 0$. Значит, предел отношения $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ при $\Delta z \rightarrow 0$ не существует и, следовательно, функция $w = \operatorname{Re} z = x$ не имеет производной ни в одной точке.

В то же время функция $w = z = x + iy$, очевидно, имеет производную в любой точке z_0 , и $f'(z_0) = 1$. Отсюда ясно, что действительная и мнимая части дифференцируемой функции $f(z)$ не могут быть произвольными; они должны быть связаны некоторыми дополнительными соотношениями. Эти соотношения возникают оттого, что условие

существования производной $f'(z_0)$ существенно более ограничительно, чем условие существования производной функций одной действительной переменной или частных производных функций нескольких действительных переменных: требуется, чтобы предел в (6.1) существовал и не зависел от пути, по которому точка $z = z_0 + \Delta z$ приближается к z_0 при $\Delta z \rightarrow 0$. Для вывода указанных соотношений напомним определение дифференцируемости функции двух переменных.

Действительная функция $u = u(x, y)$ действительных переменных называется дифференцируемой в точке $P_0(x_0, y_0)$, если она определена в некоторой окрестности точки P_0 и ее полное приращение $\Delta u = u(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - u(x_0, y_0)$ представимо в виде

$$\Delta u = B\Delta x + C\Delta y + \beta(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta x + \gamma(\Delta x, \Delta y) \cdot \Delta y, \quad (6.3)$$

где B и C – действительные числа, не зависящие от $\Delta x, \Delta y$, а β и γ – действительные функции переменных Δx и Δy , стремящиеся к нулю при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Если функция u дифференцируема в точке P_0 , то она имеет частные производные в P_0 , причем $B = \frac{\partial u(P_0)}{\partial x}$, $C = \frac{\partial u(P_0)}{\partial y}$. Но (в отличие от функций одной переменной) из существования частных производных функции $u(x, y)$ еще не следует ее дифференцируемость.

Условия Коши-Римана (Даламбера-Эйлера).

Теорема 6.1. Пусть функция комплексного переменного $w = f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ определена в окрестности точки $z_0 = x_0 + iy_0$. Для того чтобы $f(z)$ была дифференцируемой в точке z_0 , необходимо и достаточно, чтобы функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ были дифференцируемыми в точке (x_0, y_0) и чтобы в этой точке выполнялись условия:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}. \quad (6.4)$$

Равенства (6.4) называются условиями Коши-Римана (Даламбера-Эйлера).

Доказательство. Необходимость. Пусть функция $w = f(z)$ дифференцируема в точке z_0 , т.е.

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z. \quad (6.5)$$

Обозначим $f'(z_0) = a + ib$; $\alpha(\Delta z) = \beta(\Delta x, \Delta y) + i\gamma(\Delta x, \Delta y)$;

$\Delta z = \Delta x + i\Delta y$, где β и γ – действительные функции переменных $\Delta x, \Delta y$, стремящиеся к нулю при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$. Подставляя эти равенства в (6.5) и выделяя действительные и мнимые части, получим:

$$\begin{aligned} \Delta u + i\Delta v &= (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\beta + i\gamma)(\Delta x + i\Delta y) = \\ &= (a\Delta x - b\Delta y + \beta\Delta x - \gamma\Delta y) + i(b\Delta x + a\Delta y + \gamma\Delta x + \beta\Delta y). \end{aligned} \quad (6.6)$$

Поскольку равенство комплексных чисел равносильно равенству их действительных и мнимых частей, то (6.6) равносильно системе равенств

$$\begin{aligned} \Delta u &= a\Delta x - b\Delta y + \beta\Delta x - \gamma\Delta y, \\ \Delta v &= b\Delta x + a\Delta y + \gamma\Delta x + \beta\Delta y. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Равенства (6.7) означают, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ удовлетворяют условию (6.3) и, следовательно, являются дифференцируемыми. Так как коэффициенты при Δx и Δy равны частным производным по x и y соответственно, то из (6.7) получаем:

$$\begin{aligned} a &= \frac{\partial u}{\partial x}; \quad -b = \frac{\partial u}{\partial y}; \\ b &= \frac{\partial v}{\partial x}; \quad a = \frac{\partial v}{\partial y}, \end{aligned} \quad (6.8)$$

откуда и следуют условия (6.4).

Достаточность. Предположим теперь, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ дифференцируемы в точке (x_0, y_0) и выполнены условия (6.4).

Обозначая $a = \frac{\partial u}{\partial x}, b = -\frac{\partial u}{\partial y}$ и применяя (6.4), придем к равенствам (6.8).

Из (6.8) и условия дифференцируемости функций $u(x, y), v(x, y)$ имеем

$$\Delta u = a\Delta x - b\Delta y + \beta_1\Delta x + \gamma_1\Delta y,$$

$$\Delta v = b\Delta x + a\Delta y + \beta_2\Delta x + \gamma_2\Delta y,$$

где $\beta_1, \gamma_1, \beta_2, \gamma_2$ стремятся к нулю при $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$.

Отсюда

$$\Delta u + i\Delta v = (a + ib)(\Delta x + i\Delta y) + (\beta_1 + i\beta_2)\Delta x + (\gamma_1 + i\gamma_2)\Delta y. \quad (6.9)$$

Определим функцию $\alpha(\Delta z)$ равенством

$$\alpha(\Delta z) = \frac{(\beta_1 + i\beta_2)\Delta x + (\gamma_1 + i\gamma_2)\Delta y}{\Delta z}.$$

Пусть $A = a + ib$. Тогда (6.9) переписывается в виде равенства

$$\Delta w = \Delta u + i\Delta v = A\Delta z + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z,$$

которое совпадает с (6.2). Для доказательства дифференцируемости функции $f(z)$ осталось показать, что $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \alpha(\Delta z) = 0$. Из равенства

$$|\Delta z| = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \text{ следует, что } |\Delta x| \leq |\Delta z|, |\Delta y| \leq |\Delta z|. \text{ Поэтому}$$

$$|\alpha(\Delta z)| \leq \frac{|\beta_1 + i\beta_2||\Delta x| + |\gamma_1 + i\gamma_2||\Delta y|}{|\Delta z|} = |\beta_1 + i\beta_2| + |\gamma_1 + i\gamma_2|.$$

Если $\Delta z \rightarrow 0$, то $\Delta x \rightarrow 0, \Delta y \rightarrow 0$, а значит, и функции $\beta_1, \beta_2, \gamma_1, \gamma_2$ стремятся к нулю. Поэтому $\alpha(\Delta z) \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$, и доказательство теоремы 6.1 закончено.

Пример 6.2. Выяснить, является ли функция $w = z^2$ дифференцируемой; если да, то в каких точках?

Решение. $w = u + iv = (x + iy)^2 = x^2 - y^2 + 2ixy$, откуда $u = x^2 - y^2, v = 2xy$. Следовательно,

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x = \frac{\partial v}{\partial y}; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = -2y = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$

Таким образом, условия (6.4) Коши-Римана выполнены в каждой точке; значит, функция $w = z^2$ будет дифференцируемой в $\mathbb{C}$.

Пример 6.3. Исследовать дифференцируемость функции $w = \bar{z} = x - iy$.

Решение. $w = u + iv = x - iy$, откуда $u = x, v = -y$ и

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 1; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1.$$

Таким образом, условия Коши-Римана не выполнены ни в одной точке, и, следовательно, функция $w = \bar{z}$ нигде не дифференцируема.

Проверять дифференцируемость функции $w = f(z)$ и находить производные можно непосредственно по формуле (6.1).

Пример 6.4. Используя формулу (6.1), исследовать дифференцируемость функции $w = z^2$.

Решение. $\Delta w = (z_0 + \Delta z)^2 - z_0^2 = 2z_0 \Delta z + (\Delta z)^2$,

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta w}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{2z_0 \Delta z + (\Delta z)^2}{\Delta z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} (2z_0 + \Delta z) = 2z_0.$$

Следовательно, функция $f(z) = z^2$ дифференцируема в любой точке z_0 , и ее производная $f'(z) = 2z_0$.

Так как основные теоремы о пределах сохраняются для функции комплексного переменного, а определение производной функции комплексного переменного также не отличается от соответствующего определения для функций действительного переменного, то известные правила дифференцирования суммы, разности, произведения, частного и сложной функции остаются справедливыми и для функций комплексного переменного. Аналогично доказывается также, что если функция $f(z)$ дифференцируема в точке z_0 , то она непрерывна в этой точке; обратное утверждение неверно.

Аналитические функции.

Функция $w = f(z)$, дифференцируемая не только в самой точке z_0 , но и в некоторой окрестности этой точки, называется **аналитической в точке z_0** . Если $f(z)$ является аналитической в каждой точке области D , то она называется **аналитической (регулярной, голоморфной) в области D** .

Из свойств производных сразу следует, что если $f(z)$ и $g(z)$ –

функции, аналитические в области D , то функции $f(z) + g(z)$, $f(z) - g(z)$, $f(z) \cdot g(z)$ также аналитичны в области D , а частное $f(z)/g(z)$ – аналитическая функция во всех точках области D , в которых $g(z) \neq 0$. Например, функция $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-i)}$ является

аналитической в плоскости C с выброшенными точками $z=1$ и $z=i$. Из теоремы о производной сложной функции вытекает следующее утверждение: если функция $u = u(z)$ аналитична в области D и отображает D в область D' переменного u , а функция $w = f(u)$ аналитична в области D' , то сложная функция $w = f(u(z))$ переменного z аналитична в D .

Используя определение предела функции $f(z)$ в граничной точке z_1 , можно ввести понятие производной и аналитичности также и в точках границы области D . При этом следует рассматривать лишь те точки окрестности с центром z_1 , которые принадлежат D (см. рис.14). Функция, аналитическая в каждой точке замкнутой области $\bar{D}$, называется аналитической в $\bar{D}$.

§7. Связь между аналитическими и гармоническими функциями

Действительная функция $u = u(x, y)$ двух переменных x и y называется **функцией, гармонической в области D** , если она определена в D , имеет всюду в D непрерывные частные производные первого и второго порядков и удовлетворяет в каждой точке D уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0. \quad (7.1)$$

Уравнение Лапласа и гармонические функции играют важную роль в физике и технике. Например, установившееся распределение температуры в области D , потенциал электрического поля в областях,

свободных от зарядов, являются гармоническими функциями. В гидродинамике потенциал скоростей и функция тока безвихревых плоских течений несжимаемой идеальной жидкости также являются гармоническими функциями. Связь между аналитическими и гармоническими функциями, которая будет изучена в данном разделе, используется в разнообразных приложениях аналитических функций.

Теорема 7.1. Действительная и мнимая части аналитической функции являются гармоническими функциями.

Доказательство. Пусть функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитична в области D . Надо доказать, что функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ будут гармоническими в D . Нам понадобится следующий факт, доказательство которого (и даже более общего утверждения) будет приведено в §17: действительная и мнимая части аналитической функции имеют непрерывные частные производные первого и второго порядков.

Так как $f(z)$ аналитична в D , то в каждой точке области D выполнены условия Коши-Римана (6.4). Дифференцируя первое из тождеств (6.4) по x , а второе по y , получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x}; \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}. \quad (7.2)$$

Так как частные производные второго порядка функций u и v непрерывны, то $\frac{\partial^2 v}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y}$. Складывая равенства (7.2), придем к уравнению (7.1), что нам и требовалось.

Итак, если $f(z) = u + iv$ – аналитическая функция, то u и v будут гармоническими. Но обратное неверно: если u и v – произвольно выбранные гармонические функции, то функция $f(z) = u + iv$ не обязательно будет аналитической. Например, функция $f(z) = \operatorname{Re} z = x + i0$ не аналитична (см. пример 6.1), хотя функции $u = x$, $v = 0$ – гармонические. Чтобы функция $f(z) = u + iv$ была аналитической, функции u и v должны быть не только гармоническими, но и удовлетворять условию (6.4). Гармоническая функция v , связанная с гармонической функцией u условиями Коши-Римана (6.4), называется сопряженной с u . Из теорем 6.1 и 7.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 7.2. Для того, чтобы две гармонические функции $u = u(x, y)$

и $v = v(x, y)$ составляли аналитическую функцию $f(z) = u + iv$, необходимо и достаточно, чтобы v являлась сопряженной с u .

Пусть в односвязной области D задана гармоническая функция $u = u(x, y)$, причем известно, что она является действительной частью аналитической функции $f(z) = u + iv$. Тогда для мнимой части $v = v(x, y)$ из условий (6.4) находим

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Таким образом, задав функцию u , мы можем найти и частные производные функции v . Известно, что функция нескольких переменных в односвязной области D восстанавливается по своим частным производным однозначно с точностью до постоянного слагаемого (один из способов такого восстановления будет показан на примере 7.3). Итак, задав гармоническую функцию u в односвязной области D , мы можем однозначно с точностью постоянного слагаемого найти сопряженную с ней функцию v и тем самым восстановить аналитическую функцию $f(z) = u + iv$. Аналогично $f(z)$ восстанавливается (с точностью до постоянного слагаемого) и по своей мнимой части v .

Пример 7.3. Найти аналитическую функцию, если известна ее мнимая часть

$$v = 4xy + y.$$

(Нетрудно видеть, что данная функция v будет гармонической,

поскольку $\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} = 0$.)

Решение. Из условий Коши-Римана (6.4) находим частные производные неизвестной пока функции u :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = 4x + 1; \quad (7.3)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -4y. \quad (7.4)$$

Проинтегрируем уравнение $\frac{\partial u}{\partial x} = 4x + 1$ по x ; возникающая при

этом постоянная $C = C(y)$ не должна зависеть от x , но может зависеть от y :

$$u = \int (4x+1)dx = 2x^2 + x + C(y).$$

Для нахождения функции $C(y)$ подставим u в уравнение (7.4):

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C'(y) = -4y.$$

$$\text{Отсюда } C(y) = \int -4y dy = -2y^2 + C_1,$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Итак,

$$u = 2x^2 + x - 2y^2 + C_1, \quad f(z) = u + iv = (2x^2 + x - 2y^2) + i(4xy + y) + C_1.$$

Можно записать $f(z)$ и в другой форме:

$$\begin{aligned} f(z) &= 2(x^2 + 2ixy - y^2) + x + iy + C_1 = \\ &= 2(x + iy)^2 + (x + iy) + C_1 = 2z^2 + z + C_1. \end{aligned}$$

§8. Геометрический смысл производной функции комплексного переменного. Понятие конформного отображения

Напомним вначале некоторые сведения о кривых. Каждая кривая на плоскости может быть задана параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \text{при } \alpha \leq t \leq \beta, \quad (8.1)$$

где $x(t), y(t)$ – действительные функции действительного переменного t .

В дальнейшем предполагается, что эти функции имеют непрерывные производные на интервале (α, β) , причем $x'(t)$ и $y'(t)$ не обращаются в нуль одновременно. Кривая, обладающая указанными свойствами, называется *гладкой*.

Так как каждая точка (x, y) на плоскости задается комплексным числом $z = x + iy$, то уравнения (8.1) можно записать в более компактной форме:

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta.$$

Возьмем значение $t_0 \in (\alpha, \beta)$. Ему соответствует точка (x_0, y_0) , где $x_0 = x(t_0), y_0 = y(t_0)$. Известно, что вектор $\{x'(t_0), y'(t_0)\}$ направлен по касательной к кривой в точке (x_0, y_0) . Значит, и соответствующее комплексное число

$$z'(t_0) = x'(t_0) + iy'(t_0)$$

изображается этим касательным вектором. Удобно изображать этот вектор исходящим не из начала координат, а из точки (x_0, y_0) .

Пусть теперь задана функция $f(z)$, аналитическая в точке z_0 , причем $f'(z_0) \neq 0$. Предположим далее, что через точку z_0 проходит кривая γ , заданная уравнением $z(t) = x(t) + iy(t)$ при $t = t_0$ и $z(t_0) = z_0$ (рис.16).

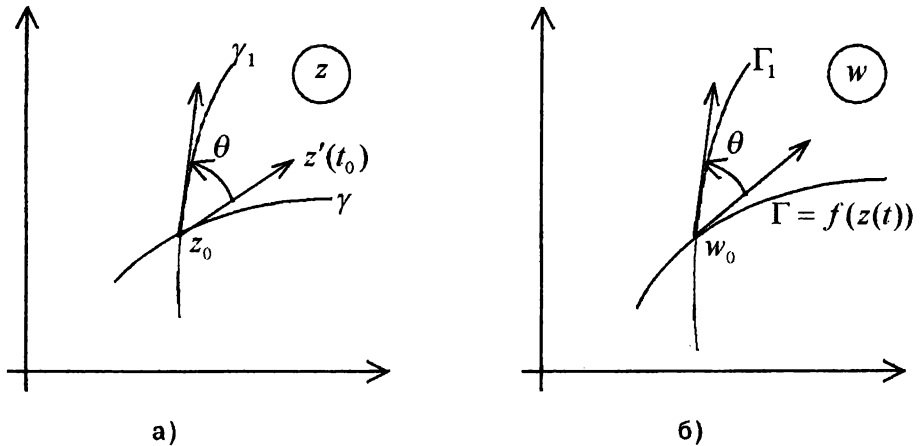


Рис. 16

Кривая γ отображается функцией $w = f(z)$ в кривую Γ , лежащую в плоскости w ; уравнение кривой Γ будет иметь вид $w = f(z(t))$; точка z_0 отобразится в точку $w_0 = f(z_0)$. По правилу дифференцирования сложной функции

$$w'(t_0) = f'(z_0) \cdot z'(t_0). \quad (8.2)$$

Отсюда следует (см. (2.5)), что

$$\operatorname{Arg} w'(t_0) = \operatorname{Arg} f'(z_0) + \operatorname{Arg} z'(t_0). \quad (8.3)$$

Но $z'(t_0)$ есть вектор, касательный к кривой γ в точке z_0 (рис.16а), а $w'(t_0)$ – вектор, касательный к кривой Γ в точке w_0 (рис.16б). Поэтому равенство (8.3) позволяет придать величине $\operatorname{Arg} f'(z_0)$ следующий геометрический смысл: *аргумент производной равен углу, на который нужно повернуть касательную в точке z_0 к любой кривой, проходящей через эту точку, чтобы получить направление касательной в точке $w_0 = f(z_0)$ к образу данной кривой при отображении $w = f(z)$.* Заметим, что этот угол не зависит от кривой γ , т.е. касательные ко всем кривым, проходящим через точку z_0 , поворачиваются при отображении $w = f(z)$ на один и тот же угол. Поэтому если через точку z_0 провести какие-либо две кривые γ и γ_1 (см. рис.16), то угол θ между касательными к этим кривым будет равен (как по величине, так и по направлению отсчета) углу между касательными к образам этих кривых. Напомним, что углом между кривыми в точке z_0 называется угол между касательными к этим кривым в точке z_0 . Таким образом, если $f'(z_0) \neq 0$, то отображение $w = f(z)$ сохраняет углы между кривыми.

Выясним теперь геометрический смысл модуля производной.

Зафиксируем точку z_0 и возьмем приращение аргумента Δz ;

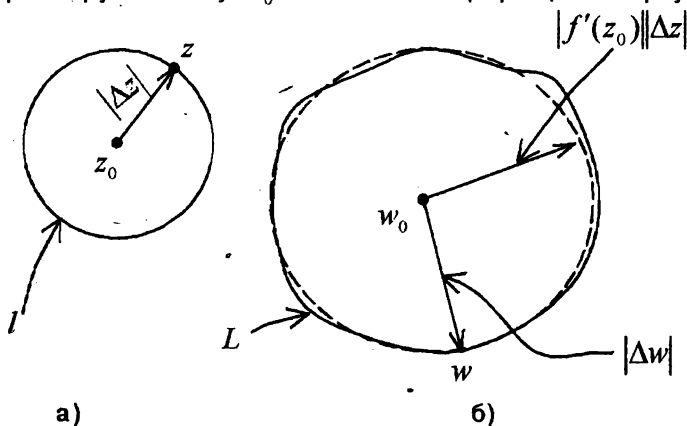


Рис. 17

очевидно, $|\Delta z|$ равен расстоянию между точками z_0 и $z = z_0 + \Delta z$ (рис.17а). Пусть $w = f(z)$, $\Delta w = w - w_0$. Тогда величина $\frac{\Delta w}{\Delta z}$ указывает, в каком отношении изменяется расстояние между точками в результате отображения $w = f(z)$. Предел $\lim_{\Delta z \rightarrow 0} |\Delta w|/|\Delta z|$ называется *коэффициентом растяжения* в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Поскольку

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{|\Delta w|}{|\Delta z|} = |f'(z_0)|,$$

то $|f'(z_0)|$ равен коэффициенту растяжения в точке z_0 при отображении $w = f(z)$. Если $|f'(z_0)| > 1$, то в достаточно малой окрестности точки z_0 расстояния между точками при отображении увеличиваются и происходит растяжение; если $|f'(z_0)| < 1$, то отображение приводит к сжатию.

Так как производная $f'(z_0)$ не зависит от того, по какому пути точка $z = z_0 + \Delta z$ приближается к z_0 , то коэффициент растяжения одинаков во всех направлениях. Это свойство можно проиллюстрировать следующим образом. Возьмем окружность I с центром z_0 и радиусом $|\Delta z|$ (рис.17а). При отображении $w = f(z)$ эта окружность перейдет в кривую L (рис.17б); расстояние от точки $w = f(z_0 + \Delta z)$ этой кривой до точки $w_0 = f(z_0)$ равно $|\Delta w| = |f(z_0 + \Delta z) - f(z_0)|$. Поскольку

$$\Delta w = f'(z_0)\Delta z + \alpha(\Delta z) \cdot \Delta z,$$

где $\alpha(\Delta z) \rightarrow 0$ при $\Delta z \rightarrow 0$, то точки кривой L будут отличаться от окружности с центром w_0 и радиусом $|f'(z_0)||\Delta z|$ на величину более высокого порядка малости, чем $|\Delta z|$.

Отображение называется **конформным отображением в точке z_0** , если: 1) при этом отображении сохраняются углы между любыми двумя

кривыми, проходящими через точку z_0 ; 2) растяжение в точке z_0 не зависит от направления.

Если конформное отображение сохраняет и направление отсчета углов, то оно называется *конформным отображением первого рода*; если направление отсчета углов меняется на противоположное, то *конформным отображением второго рода*.

Полученные выше результаты сформулируем в виде теоремы.

Теорема 8.1. Если функция $w = f(z)$ является аналитической в точке z_0 и $f'(z_0) \neq 0$, то $f(z)$ осуществляет конформное отображение первого рода в точке z_0 . При этом $\text{Arg } f'(z_0)$ означает угол поворота, а $|f'(z_0)|$ – коэффициент растяжения при данном отображении.

Пример конформного отображения второго рода дает функция (не аналитическая!) $w = \bar{z}$, которая каждую область D отображает на область E , симметричную D относительно оси OX .

Если $f'(z_0) = 0$, то отображение, вообще говоря, уже не будет конформным в точке z_0 . Так, отображение $w = z^2$ увеличивает вдвое углы между лучами в начале координат (см. пример 5.1 и равенства (5.1)).

ГЛАВА IV. КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

Функция $w = f(z)$ называется **однолистной в области D** , если в разных точках области D эта функция принимает разные значения: если $z_1 \neq z_2$, то $f(z_1) \neq f(z_2)$.

Однолистность означает, что отображение области D на область E , осуществляемое функцией $w = f(z)$, является взаимно-однозначным; каждая точка $w \in E$ имеет только один прообраз в D . Например, функция $w = z^2$ не является однолистной во всей комплексной плоскости C , так как $(-1)^2 = 1^2$. Но она является однолистной в полуплоскости $D = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ (докажите!).

Отображение области D на область E называется **конформным отображением области D** , если оно непрерывно и конформно в каждой точке области D .

Из теоремы 8.1 следует, что если функция $f(z)$ аналитична в области D и $f'(z)$ не обращается в нуль ни в одной точке из D , то эта функция осуществляет конформное отображение области D .

Перейдем к изучению основных элементарных функций и свойств конформных отображений.

§9. Линейная и дробно-линейная функции

Линейная функция. Функция

$$w = az + b, \quad (9.1)$$

где a и b – заданные комплексные числа при $a \neq 0$, называется **линейной функцией**. Так как $w' = a \neq 0$, то отображение (9.1) является конформным во всей плоскости C . Докажем, что оно также однолистно в C . Если $w_1 = az_1 + b$, $w_2 = az_2 + b$, то $w_1 - w_2 = a(z_1 - z_2)$. Поэтому при $z_1 \neq z_2$ будет $w_1 \neq w_2$, и однолистность установлена. Положив по определению $w(\infty) = \infty$, получим однолистное отображение всей расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$ на $\bar{C}$.

Для изучения геометрических свойств отображения (9.1) рассмотрим вначале случай $b = 0$, т.е. $w = az$.

Пусть $a = |a|e^{i\alpha}$, $z = |z|e^{i\varphi}$. Тогда

$$w = |a||z|e^{i(\alpha+\varphi)}.$$

Поэтому для получения вектора $w = az$ нужно выполнить следующие два действия:

1) умножить заданный вектор z на $|a|$. При этом направление вектора z останется прежним, но длина увеличится в $|a|$ раз. Значит, умножение на $|a|$ есть преобразование подобия (гомотетия) с центром в начале координат и коэффициентом подобия $|a|$;

2) повернуть полученный вектор $|a|z$ на угол α .

Для рассмотрения общего случая (9.1) заметим, что при сложении вектора az с вектором b происходит параллельный перенос концевой точки вектора az на вектор b .

Итак, отображение (9.1) получается путем композиции (т.е. последовательного выполнения) следующих трех операций: 1) преобразования подобия с центром в начале координат и коэффициентом подобия $|a|$; 2) поворота вокруг начала координат на угол α ; 3) параллельного переноса на вектор b .

Пример 9.1. Найти линейную функцию, отображающую квадрат D со стороной 2 (рис.18а) в квадрат E со стороной 4 (рис.18б), и точку A в точку B .

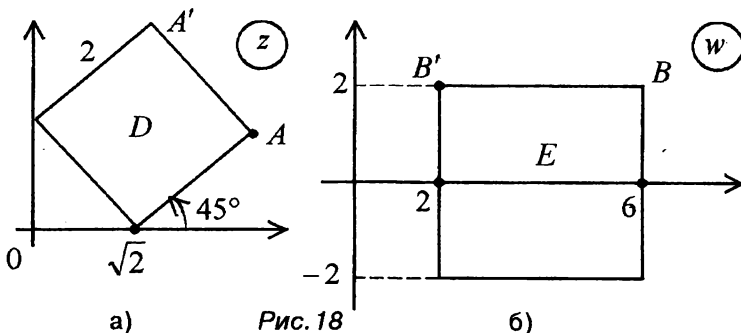


Рис. 18 Современный Гуманитарный Университет

Решение. 1. Подберем преобразование подобия, переводящее D в квадрат D_1 со стороной 4. Так как коэффициент подобия равен 2, то нужное преобразование есть $w_1 = 2z$. Точка $A(2\sqrt{2}; \sqrt{2})$ перейдет в $A_1(4\sqrt{2}; 2\sqrt{2})$, A' в A'_1 .

2. Повернем получившийся квадрат D_1 относительно начала координат так, чтобы сторона A'_1A_1 стала параллельной стороне $B'B$. Получившийся квадрат обозначим D_2 . Очевидно, нужный поворот будет на угол 45° против часовой стрелки; это преобразование запишем в виде $w_2 = w_1 \cdot e^{i\pi/4}$. Точка A_1 перейдет в

$$A_2 = (4\sqrt{2} + i\sqrt{2}) \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4}) = (4 + 2i)(1 + i) = 2 + 6i.$$

3. Осталось сделать параллельный перенос квадрата D_2 на вектор $\overline{A_2B}$. Учитывая, что $B = 6 + 2i$, имеем $\overline{A_2B} = 4 - 4i$, и $w = w_2 + 4 - 4i$. Итак,

$$w = w_2 + 4 - 4i = w_1 e^{i\pi/4} + 4 - 4i = 2ze^{i\pi/4} + 4 - 4i,$$

и искомое линейное отображение $w = az + b$ получено:

$$a = 2e^{i\pi/4} = \sqrt{2} + i\sqrt{2}; \quad b = 4 - 4i.$$

Заметим, что на каждом из трех этапов линейного отображения (преобразование подобия, поворот, параллельный перенос) прямые переходят в прямые, а окружности – в окружности. Следовательно, этими свойствами обладает и линейное отображение (9.1).

Дробно-линейная функция. Перейдем к изучению дробно-линейной функции, определяемой равенством

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad (9.2)$$

и соответствующего **дробно-линейного отображения**. Так как

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a}{c}, \quad \lim_{z \rightarrow -d/c} \frac{az + b}{cz + d} = \infty,$$

то естественно определить $w(\infty) = a/c$, $w(-d/c) = \infty$. Определенная таким образом функция будет непрерывной во всей расширенной

комплексной плоскости $\overline{C}$.

Если $c = 0$, то $w = \frac{a}{d}z + b$, и дробно-линейная функция сводится к уже изученной линейной функции. Поэтому в дальнейшем предполагается, что $c \neq 0$.

Умножим числитель и знаменатель дроби (9.2) на c и добавим в числителе $+ad - ad$. Тогда дробь (9.2) можно представить в виде

$$w = \frac{az + b}{cz + d} = \frac{a(cz + d) + (bc - ad)}{c(cz + d)} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cz + d)}. \quad (9.3)$$

Если $bc - ad = 0$, то $w = a/c$, и функция (9.2) сводится к постоянной. В дальнейшем считаем выполненными условия:

$$c \neq 0, \quad bc - ad \neq 0. \quad (9.4)$$

Докажем, что дробно-линейная функция (9.2) осуществляет взаимно-однозначное отображение $\overline{C}$ на $\overline{C}$. С этой целью решим уравнение (9.2) относительно z (это возможно при $z \neq -d/c$, $z \neq \infty$, $w \neq a/c$, $w \neq \infty$):

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} = -\frac{d}{c} + \frac{bc - ad}{c(cw - a)}.$$

Поэтому каждое значение $w \neq a/c$ и $w \neq \infty$ имеет только один прообраз $z \neq -d/c$ и $z \neq \infty$. Но в силу определения, значению $w = a/c$ соответствует $z = \infty$, а значению $w = \infty$ – величина $z = -d/c$. Итак, каждая точка $w \in \overline{C}$ имеет только один прообраз $z \in \overline{C}$, что и требовалось доказать.

Установим теперь конформность отображения (9.2). Так как

$$w' = \frac{ad - bc}{(cz + d)^2},$$

то при $z \neq -d/c$ и $z \neq \infty$ производная w' существует и не равна нулю. По теореме 8.1 дробно-линейное отображение является конформным всюду, кроме этих двух точек. Для выяснения конформности при $z = -d/c$ и $z = \infty$ нам понадобится следующее определение.

Под углом между двумя линиями в точке $z = \infty$ понимается угол между образами этих линий при отображении $w = \frac{1}{z}$ в начале координат.

Пример 9.2. Найти угол между ветвью параболы $y = x^2, x \geq 0$ и лучом $y = \frac{x}{\sqrt{3}}$ в точке $z = \infty$ (рис.19а).

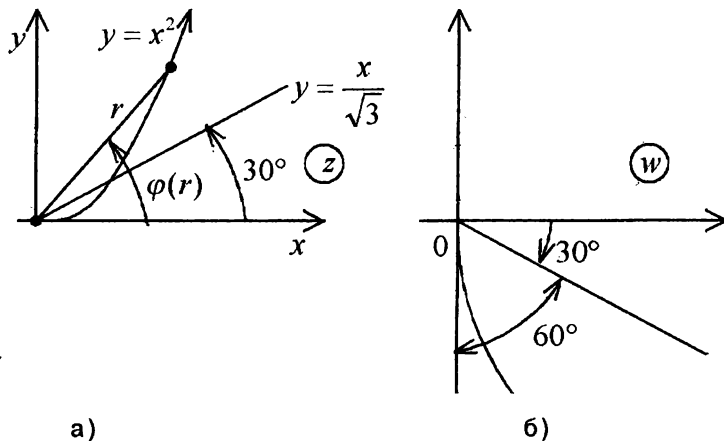


Рис.19

Решение. Любую точку параболы можно записать в виде $z = re^{i\varphi(r)}$,

причем $\varphi(r) \rightarrow \pi/2$ при $r \rightarrow \infty$. Любая точка луча имеет вид $z = re^{i\pi/6}$.

При отображении $w = \frac{1}{z}$ точки параболы перейдут в

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\varphi(r)}.$$

При $r \rightarrow \infty$ $|w| = \frac{1}{r} \rightarrow 0$, $\arg w = -\varphi(r) \rightarrow -\frac{\pi}{2}$. Значит, ветвь

параболы отобразится в кривую, касающуюся оси OY (рис.19б). Для точек луча

$$w = \frac{1}{z} = \frac{1}{r} e^{-i\pi/6}.$$

Значит, луч отобразится в луч, симметричный исходному лучу относительно оси OX . Угол между образами кривых в плоскости переменного w равен, очевидно, $\pi/3$; это и будет, по определению, угол между исходными кривыми в точке $z = \infty$.

Поясним, почему угол между линиями в бесконечно удаленной точке вводится именно так, как указано в определении (почему, например, выбирается отображение $w = 1/z$, а не $w = 1/z^2$). Пусть линии γ_1 и γ_2 пересекаются в точке $z_0 \in C$, и пусть Γ_1 и Γ_2 – образы этих кривых на сфере Римана при стереографической проекции (см. рис. 11). Тогда угол между γ_1 и γ_2 будет равен углу между Γ_1 и Γ_2 (доказательство этого факта мы не приводим). Пусть теперь линии γ_1 и γ_2 пересекаются в точке $z = \infty$ (т.е. γ_1 и γ_2 уходят сколь угодно далеко от начала координат). Тогда их образы Γ_1 и Γ_2 будут пересекаться в точке P (рис. 11). Естественно под углом между Γ_1 и Γ_2 в точке $z = \infty$ понимать угол между Γ_1 и Γ_2 в точке P . Применим к γ_1 и γ_2 преобразование $w = 1/z$. Они перейдут в кривые γ'_1 и γ'_2 , пересекающиеся в начале координат; под тем же углом пересекаются и образы Γ'_1 , Γ'_2 этих кривых на сфере Римана. Теперь приведем без доказательства следующее свойство преобразования $w = 1/z$: угол между Γ_1 и Γ_2 равен углу между Γ'_1 и Γ'_2 . Более того, угол между любыми (гладкими) кривыми на сфере Римана не меняется при отображении $w = 1/z$. Поэтому угол между Γ_1 и Γ_2 в точке P равен углу между γ'_1 и γ'_2 в точке $z = 0$, что и объясняет разумность принятого определения угла в бесконечно удаленной точке.

Отображение называется **конформным в точке $z = \infty$** , если оно сохраняет углы между любыми двумя кривыми, проходящими через эту точку.

Теперь мы готовы к рассмотрению конформности отображения (9.2) в точках $z = -d/c$ и $z = \infty$.

Пусть γ_1 и γ_2 – два пути, проходящие через точку $z = -d/c$ и пересекающиеся в этой точке под углом α . Дробно-линейное отображение (9.2) переведет их в кривые γ'_1 и γ'_2 , пересекающиеся в точке $w = \infty$. Чтобы найти угол между ними, следует, по определению, отобразить γ'_1 и γ'_2 с помощью функции $W = 1/w$ в кривые γ''_1 и γ''_2 и определить угол между γ''_1 и γ''_2 в точке $W = 0$. Отображение γ_1 и γ_2 в γ''_1 и γ''_2 имеет вид:

$$W = \frac{1}{w} = \frac{cz + d}{az + b}. \quad (9.5)$$

Производная

$$\frac{dW}{dz} = \frac{bc - ad}{(az + b)^2}$$

в точке $z = -d/c$ существует и отлична от нуля. Следовательно, угол между γ''_1 и γ''_2 в точке $W = 0$ равен α ; значит, угол между γ'_1 и γ'_2 также равен α . Таким образом, отображение (9.2) сохраняет угол между кривыми в точке $z = -d/c$. Растяжение в этой точке при отображении (9.2) равно ∞ по любому направлению и, следовательно, не зависит от направления. Таким образом, отображение (9.2) является конформным в точке $z = -d/c$.

Рассмотрим конформность в точке $z = \infty$. Пусть кривые γ_1 и γ_2 пересекаются в точке $z = \infty$ под углом α . Это означает, что образы γ'_1 и γ'_2 этих кривых при отображении $W = \frac{1}{z}$ пересекаются под углом α в точке $W = 0$. Обозначим через γ''_1 и γ''_2 кривые, в которые переходят γ_1 и γ_2 при отображении (9.2). Надо доказать, что угол между γ''_1 и γ''_2 в точке $w = a/c$ (образе точки $z = \infty$) равен α . С этой целью найдем отображение, переводящее γ'_1 и γ'_2 в γ''_1 и γ''_2 . Выразим z из равенства $W = 1/z$ и подставим в (9.2): $z = 1/W$:

$$w = \frac{\frac{a}{W} + b}{\frac{c}{W} + d} = \frac{a + bW}{c + dW}.$$

Производная этого отображения, равная

$$\frac{dw}{dW} = \frac{bc - ad}{(c + dW)^2},$$

в точке $W = 0$ существует и отлична от нуля (см. (9.4)). Поэтому угол между γ'_1 и γ'_2 в точке $W = 0$ равен углу между γ''_1 и γ''_2 в точке $w = a/c$. Это и означает, по определению, что отображение (9.2) является конформным в точке $z = \infty$.

Полученные результаты сформулируем в виде следующей теоремы.

Теорема 9.3. *Дробно-линейная функция*

$$w = \frac{az + b}{cz + d}, \quad ad - bc \neq 0, \quad w(\infty) = a/c, \quad w(-d/c) = \infty, \quad (9.6)$$

осуществляет взаимно-однозначное и конформное отображение расширенной комплексной плоскости $\bar{C}$ на всю $\bar{C}$.

Мы не исключаем случай $c = 0$ в теореме 9.3, так как в этом случае дробно-линейная функция становится линейной, также обладающей всеми свойствами, указанными в теореме 9.3.

Установим теперь **круговое свойство дробно-линейного отображения**. Будем считать, что прямая является окружностью бесконечно большого радиуса.

Теорема 9.4. *При дробно-линейном отображении (9.6) окружности всегда переходят в окружности.*

(Заметим, что окружность конечного радиуса может переходить в окружность бесконечного радиуса, т.е. в прямую, и наоборот.)

Доказательство. Рассмотрим уравнение

$$A(x^2 + y^2) + Bx + Cy + D = 0, \quad (9.7)$$

где A, B, C, D – действительные коэффициенты. При $A = 0$ получаем $Bx + Cy + D = 0$, т.е. уравнение прямой. Если $A \neq 0$, то, разделив на A и выделив полные квадраты, получим равенство

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = \pm R^2,$$

которое определяет либо окружность, если справа $+R^2$ при $R > 0$, либо

точку, если $R = 0$, либо пустое множество, если справа $-R^2$. С другой стороны, любую окружность (в частности, прямую) можно задать уравнением вида (9.7).

Докажем вначале круговое свойство для отображения $w = 1/z$. Возьмем произвольную окружность на комплексной плоскости. Она задается уравнением (9.7). Обозначим $z = x + iy$, $w = u + iv$. Равенство $w = 1/z$ дает $z = 1/w$, или

$$x + iy = \frac{1}{u + iv} = \frac{u - iv}{u^2 + v^2},$$

откуда $x = \frac{u}{u^2 + v^2}$, $y = -\frac{v}{u^2 + v^2}$.

Чтобы получить уравнение кривой, в которую перейдет окружность при отображении $w = 1/z$, подставим в (9.7) найденные выражения для x и y :

$$\frac{A}{u^2 + v^2} + \frac{Bu}{u^2 + v^2} - \frac{Cv}{u^2 + v^2} + D = 0,$$

или

$$A + Bu - Cv + D(u^2 + v^2) = 0.$$

Мы пришли к уравнению такого же вида, что и (9.2), но в плоскости переменной $w = u + iv$. Как мы видели ранее, такое уравнение определяет либо окружность (в частности, прямую при $D = 0$), либо точку, либо пустое множество. Но в силу взаимной однозначности дробно-линейного отображения окружность не может перейти в точку или в пустое множество. Значит, она переходит в окружность, и круговое свойство отображения $w = 1/z$ установлено.

Рассмотрим теперь общий случай дробно-линейного отображения (9.6). Если $c = 0$, то получим линейное отображение $w = a_1 z + b_1$, которое сводится к растяжению с поворотом и сдвигу. Каждое из этих преобразований, очевидно, обладает круговым свойством. Значит, и для отображения $w = a_1 z + b_1$ данное свойство имеет место.

Пусть теперь $c \neq 0$. Воспользовавшись равенством (9.3), представим дробно-линейное отображение в виде

$$w = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc-ad}{c^2(z+d/c)} = E + \frac{F}{z+G}, \quad (9.8)$$

где $E = \frac{a}{c}$, $F = \frac{bc-ad}{c^2}$, $G = \frac{d}{c}$.

Из равенства (9.8) следует, что дробно-линейное отображение представлено в виде композиции следующих трех преобразований:

1) $w_1 = z + G$; 2) $w_2 = 1/w_1$; 3) $w = E + Fw_2$. Как было установлено выше, каждое из этих преобразований окружность переводит в окружность. Значит их композиция также обладает этим свойством, что и требовалось доказать.

Чтобы сформулировать еще одно свойство дробно-линейных отображений, нам понадобится следующее определение.

Точки A и A' называются *симметричными относительно окружности* радиуса $R < \infty$, если они лежат на одном луче, выходящем из центра O окружности, и

$$OA \cdot OA' = R^2. \quad (9.9)$$

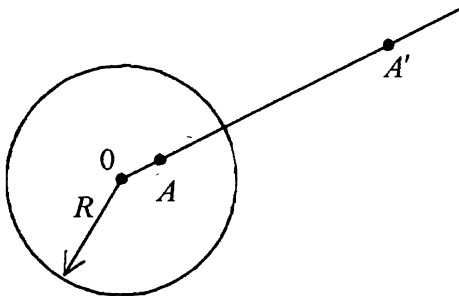


Рис.20

Если точка A (рис.20) приближается к окружности, т.е. если $OA \rightarrow R$, то OA' тоже стремится к R ; всякая точка на окружности симметрична самой себе; если $OA \rightarrow 0$, то $OA' \rightarrow \infty$.

Поэтому для точки O симметричной будет бесконечно удаленная точка. Под симметрией относительно

окружности радиуса $R = \infty$ понимается обычная симметрия относительно прямой.

Лемма 9.5. Для того, чтобы точки A и A' были симметричными относительно окружности Γ (возможно, бесконечного радиуса), необходимо и достаточно, чтобы любая окружность, проходящая через A и A' , была перпендикулярна Γ (рис.21).

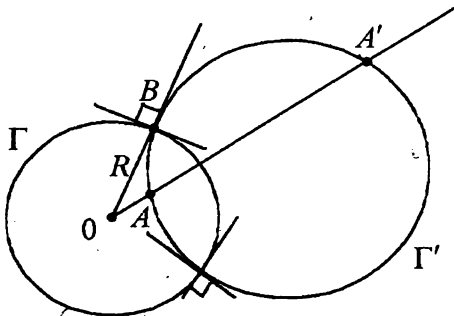


Рис.21

Доказательство. Необходимость. Пусть точки A и A' симметричны относительно окружности Γ . Проведем произвольную окружность Γ' через точки A и A' , и пусть B – точка пересечения Γ и Γ' . По известной теореме о секущей и касательной произведение секущей OA' на ее внешнюю часть OA равно квадрату касательной. В то же время, в силу симметрии, $OA \cdot OA' = R^2$. Значит, радиус OB является касательной к окружности Γ' . Поскольку OB перпендикулярен касательной к Γ , проходящей через точку B , то окружности Γ и Γ' перпендикулярны, что и требовалось доказать. Если Γ' – прямая (это будет в случае $A = 0$), то она проходит через O и, следовательно, также перпендикулярна Γ .

Достаточность. Пусть точки A и A' таковы, что любая окружность (в частности, прямая), проходящая через них, пересекает Γ под прямым углом (см. рис.21). Докажем, что A и A' симметричны относительно Γ . Так как прямая AA' перпендикулярна Γ , то она проходит через O . Значит, точки O, A, A' лежат на одной прямой. Но они лежат и на одном луче, выходящем из O . Действительно, если бы точки A и A' лежали по разные стороны от O , то окружность с диаметром AA' не была бы перпендикулярна Γ .

Проведем произвольную окружность Γ' через A и A' с радиусом $R' < \infty$. Пусть B – точка пересечения Γ и Γ' . По условию, Γ и Γ' пересекаются под прямым углом. Поэтому радиус OB будет касаться Γ' . По той же теореме о секущей и касательной $OA \cdot OA' = R^2$. Следовательно, точки A и A' симметричны относительно Γ .

Мы доказали лемму 9.5 в случае $R < \infty$. Если $R = \infty$, то рассуждение существенно упрощается, и мы предлагаем провести его читателю самостоятельно.

Теперь мы готовы установить следующее свойство дробно-линейных отображений (*сохранение симметрии*):

Теорема 9.6. При дробно-линейном отображении (9.6) пара точек, симметричных относительно окружности (в частности, прямой), переходит в пару точек, симметричных относительно образа этой окружности.

Доказательство. Пусть точки z_1 и z_2 симметричны относительно окружности Γ . При дробно-линейном отображении (9.6)

Γ перейдет в кривую γ , которая по теореме 9.4 также является окружностью; точки z_1 и z_2 перейдут в w_1 и w_2 . Надо доказать, что w_1 и w_2 симметричны относительно γ . Возьмем любую окружность γ' , проходящую через w_1 и w_2 , и рассмотрим ее прообраз Γ' при отображении (9.6) (т.е. множество точек на плоскости переменного z , переходящих в γ'). Для этого выразим z из уравнения (9.6):

$$z = \frac{-dw + b}{cw - a} \text{ при } ad - bc \neq 0.$$

Мы видим, что Γ' получается из γ' также дробно-линейным отображением. Поскольку γ' является окружностью, то по теореме 9.4 Γ' – тоже окружность. Так как Γ' проходит через точки z_1 и z_2 , симметричные относительно Γ , то по лемме 9.5 Γ' перпендикулярна Γ . В силу конформности дробно-линейного отображения и γ' перпендикулярна γ . Отсюда, по лемме 9.5, следует, что w_1 и w_2 симметричны относительно γ , и, таким образом, доказательство завершено.

Установленные свойства дробно-линейных отображений позволяют находить отображения областей, ограниченных окружностями (в частности, прямыми).

Пример 9.7. Найти дробно-линейную функцию, отображающую верхнюю полуплоскость на внутренность единичного круга.

Решение. Пусть z_0 – точка верхней полуплоскости, переходящая в центр единичного круга, т.е. $w(z_0) = 0$. По теореме 9.6 точка $\bar{z}_0$, симметричная точке z_0 относительно действительной оси, должна переходить в точку $w = \infty$, симметричную точке $w = 0$ относительно окружности $|w| = 1$. Дробно-линейная функция, удовлетворяющая условиям $w(z_0) = 0$, $w(\bar{z}_0) = \infty$, имеет вид

$$w = A \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0},$$

где A – комплексная постоянная. Но эта постоянная не вполне произвольна, так как при действительном значении z точка w должна находиться на единичной окружности и, следовательно, $|w| = 1$. Учитывая, что при $z = x$

$$|x - z_0| = |x - \bar{z}_0|,$$

получим

$$1 = |w| = \left| A \frac{x - z_0}{x - \bar{z}_0} \right| = |A| \frac{|x - z_0|}{|x - \bar{z}_0|} = |A|.$$

Следовательно, $A = e^{i\varphi}$, и искомая функция имеет вид

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} \text{ при } \operatorname{Im} z_0 > 0.$$

Мы видим, что существует бесконечное множество дробно-линейных функций, осуществляющих нужное отображение. Каждая из этих функций определяется значениями действительного числа φ и комплексного числа z_0 .

Пример 9.8. Найти дробно-линейную функцию, отображающую единичный круг $|z| < 1$ на единичный круг $|w| < 1$.

Решение. Пусть z_0 – точка круга $|z| < 1$, переходящая в точку $w = 0$.

Тогда точка z'_0 , симметричная точке z_0 относительно окружности $|z| = 1$, должна перейти в точку $w = \infty$, симметричную точке $w = 0$ относительно окружности $|w| = 1$. Выразим z'_0 через z_0 . Так как z_0 и z'_0 лежат на одном луче, исходящем из точки $z = 0$, то $z'_0 = kz_0$, где k – положительное число. В силу (9.9), $|z_0||z'_0| = 1$, т.е. $k \cdot |z_0|^2 = 1$, откуда $k = 1/|z_0|^2$, и (см. (2.4))

$$z'_0 = kz_0 = z_0/|z_0|^2 = z_0/(z_0\bar{z}_0) = 1/\bar{z}_0.$$

Дробно-линейная функция, удовлетворяющая условиям $w(z_0) = 0$, $w(1/\bar{z}_0) = \infty$ имеет вид

$$w = A \frac{z - z_0}{z - 1/\bar{z}_0} = -A\bar{z}_0 \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z},$$

где A – комплексная постоянная. Константа A не произвольна, так как точки окружности $|z|=1$ отображаются в точки окружности $|w|=1$; в частности при $z=1$ и $|w|=1$. Поэтому

$$1 = |w| = \left| -A\bar{z}_0 \frac{1 - z_0}{1 - \bar{z}_0} \right| = |-A\bar{z}_0|,$$

так как $|1 - z_0| = |1 - \bar{z}_0|$. Следовательно, $-A\bar{z}_0 = e^{i\varphi}$, и искомое отображение имеет вид

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}. \quad (9.10)$$

Здесь также отображение определено не однозначно. На рис. 22 изображен прообраз сетки полярных координат плоскости w . Прообразами диаметров (рис.22б) служат дуги окружностей, перпендикулярных окружности $|z|=1$ (рис.22а); прообразами окружностей $|w|=r$, $r < 1$, являются также окружности (но не концентрические) плоскости z .

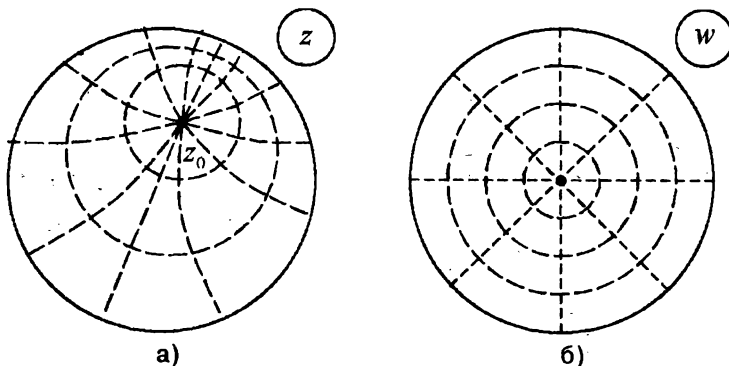


Рис.22

§10. Степенная функция. Понятие римановой поверхности

Рассмотрим степенную функцию

$$w = z^n, \quad (10.1)$$

где n – натуральное число. Производная $w' = nz^{n-1}$ существует и отлична от нуля во всех точках $z \neq 0, z \neq \infty$. Поэтому отображение, осуществляемое функцией (10.1), является конформным во всех точках, кроме $z=0$ и $z=\infty$. Если записать переменные z и w в показательной форме $z = re^{i\varphi}, w = \rho e^{i\theta}$, то (10.1) приводит к равенствам

$$\rho = r^n, \theta = n\varphi.$$

(Мы уже рассматривали отображение (10.1) для случая $n=2$ в примере 5.1). Отсюда видно, что окружности $|z|=r$ переходят в окружности $|w|=r^n$, угол $0 < \varphi < \alpha$ плоскости z ($\alpha < 2\pi/n$) с вершиной в начале координат отображается на угол $0 < \theta < n\alpha$ плоскости w . Следовательно, конформность отображения нарушается в точке $z=0$: углы в этой точке увеличиваются при отображении в n раз. Нетрудно показать, что отображение (10.1) не является конформным и в точке $z=\infty$ (попробуйте сделать это самостоятельно).

Пусть точки z_1 и z_2 таковы, что $z_2 = z_1 e^{2\pi/n}, n \geq 2$. Легко видеть, что $z_1 \neq z_2$ и $z_2^n = z_1^n \cdot e^{2\pi} = z_1^n$. Поэтому отображение (10.1) не является однолиственным во всей комплексной плоскости C , но является таковым внутри любого угла величиной $\alpha < 2\pi/n$ с вершиной в начале координат.

Чтобы ввести функцию, обратную степенной, нам понадобятся следующие определения.

Многозначной функцией комплексного переменного называется правило (закон), по которому комплексному числу z из множества D соответствует несколько (возможно, бесконечно много) комплексных чисел w .

Все функции, рассмотренные ранее (кроме функции $\text{Arg} z$), были однозначными. Функция $\text{Arg} z$ является многозначной:

$$\operatorname{Arg} z = \arg z + 2\pi n,$$

где $\arg z$ – главное значение аргумента и n – любое целое число.

В дальнейшем под термином *функция*, используемым без каких-либо пояснений, подразумевается однозначная функция; многозначность изучаемых функций всегда будет оговариваться дополнительно.

Пусть функция $w = f(z)$ отображает область D на область E . Обратной к функции $w = f(z)$ называется функция (вообще говоря, многозначная) $z = g(w)$, определенная на области E , которая каждому комплексному числу $w \in E$ ставит в соответствие все комплексные числа $z \in D$ такие, что $f(z) = w$.

Другими словами, функция, обратная к $w = f(z)$ – это правило, по которому каждой точке $w \in E$ соответствуют все ее прообразы $z \in D$.

Если функция $w = f(z)$ однолистка в D , то обратная функция однозначна (и также однолистка) в D ; если $w = f(z)$ не однолистка, то обратная функция будет многозначной. Так же, как для функций действительного переменного, доказывается следующее утверждение: если функция $w = f(z)$ однолистка и аналитична в окрестности точки z_0 и $f'(z) \neq 0$, то обратная функция аналитична в окрестности точки $w_0 = f(z_0)$.

Например, обратной к функции $w = z^n$ является многозначная функция $z = \sqrt[n]{w}$: каждому значению w , отличному от 0 и ∞ , соответствует n различных корней n -й степени, определяемых формулой (2.10). Числа 0 и ∞ имеют по одному корню: $\sqrt[n]{0} = 0, \sqrt[n]{\infty} = \infty$.

Аргументом функции $z = g(w)$, обратной $w = f(z)$, является переменная w . Поскольку аргумент функции часто обозначают через z , то для единообразия переобозначают переменные z и w и пишут $w = g(z)$.

Рассмотрим подробнее функцию $w = \sqrt[n]{z}$. Как было отмечено выше, она является многозначной. Тем не менее, можно определить эту функцию на множестве более сложного устройства, чем комплексная плоскость, на котором функция $w = \sqrt[n]{z}$ станет взаимно-однозначной и

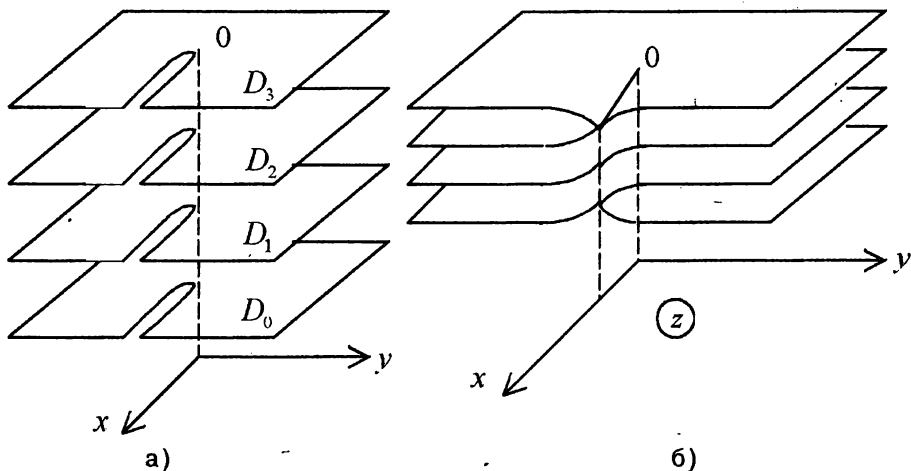


Рис.23

непрерывной. Опишем соответствующее множество. Возьмем n экземпляров ("листов") комплексной плоскости, разрезанной вдоль положительной полуоси, и расположим их друг над другом (на рис.23а показан случай $n=4$). Затем тот край разреза области D_0 , к которому мы подходим снизу от луча OX , склеим с верхним краем разреза области D_1 ; нижний край разреза области D_1 склеим с верхним краем разреза области D_2 и так далее, пока не склеим нижний край разреза D_{n-2} с верхним краем разреза D_{n-1} . Теперь склеим оставшиеся свободными нижний край разреза области D_{n-1} (на рис. 23а это D_3) с верхним краем разреза области D_0 . В трехмерном пространстве такую склейку невозможно осуществить без пересечения с уже сделанными склейками промежуточных листов. Но мы условимся считать эту склейку непересекающейся с предыдущими. Полученная поверхность показана на рис. 23б. Она называется *римановой поверхностью* функции $w = \sqrt[n]{z}$. Над каждой точкой комплексной плоскости, отличной от 0 и ∞ , расположено ровно n точек римановой поверхности. Точки $x > 0$ действительной полуоси не составляют исключения, так как все склейки, расположенные над ней, считаются непересекающимися. Лишь две точки не обладают этим свойством: $z = 0$ и $z = \infty$. Все листы римановой поверхности считаются склеенными в точках, расположенных над

точками $z = 0$ и $z = \infty$.

Определим теперь функцию $w = \sqrt[n]{z}$ на построенной римановой поверхности. Напомним, что если $z = re^{i\varphi}$, то все корни n -й степени из z определяются формулой (2.10):

$$w = \sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \text{ при } k = 0, 1, \dots, n-1. \quad (10.2)$$

Угол φ в этой формуле можно выбирать из любого промежутка длины 2π ; нам удобно предполагать, что $0 \leq \varphi < 2\pi$.

Точкам $z = re^{i\varphi}$, лежащим на листе D_0 и склейке D_0 с D_{n-1} , ставим в соответствие значение корня с $k = 0$; точкам, лежащим на листе D_1 и склейке D_1 с D_0 – значение корня с $k = 1$. Вообще, точкам, лежащим на D_k при $1 \leq k \leq n-1$, и склейке D_k с D_{k-1} соответствует значение корня с данным k . Построенное соответствие будет однозначной функцией на римановой поверхности.

Нетрудно показать, что эта функция взаимно-однозначно отображает риманову поверхность на всю комплексную плоскость. Действительно, лист D_k будет

отображаться в угол $\frac{2\pi k}{n} < \varphi < \frac{2\pi(k+1)}{n}$, а склейки отобразятся в лучи,

соединяющие эти углы; тем самым вся комплексная плоскость будет покрыта образами точек римановой поверхности.

Покажем, что это отображение является и непрерывным. Если точка z лежит на листе D_k с разрезом, то непрерывность в этой точке прямо следует из формулы (10.2) с фиксированным k . Для демонстрации непрерывности в точках склеек рассмотрим контур на римановой поверхности, состоящий из точек, расположенных над окружностью $|z| = 1$ комплексной плоскости. Начнем обходить этот контур с точки z , расположенной на верхнем берегу разреза листа D_0 . Так как $r = 1$, $\varphi = 0$, $k = 0$, то $w = \sqrt[n]{z} = 1$. При обходе первого витка контура на листе

D_0 $\varphi \rightarrow 2\pi$ и $\sqrt[n]{z} \rightarrow \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$. Перейдя по склейке на лист D_1 ,

мы получим, по определению, $\sqrt[n]{z} = \cos \frac{\varphi + 2\pi}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{n}$ (так как

$k=1$). В частности, при $\varphi=0$ будет то же самое значение корня, к которому мы приближались, подходя к нижнему краю разреза по листу

D_0 . Значит, в точках склейки D_0 с D_1 функция $\sqrt[n]{z}$ будет непрерывной.

Аналогично показывается непрерывность корня и при переходе с D_{k-1}

на D_k при $1 \leq k \leq n-1$. Наконец, обходя контур по листу D_{n-1} и

приближаясь к нижнему краю разреза, получим $k=n-1$, $\varphi \rightarrow 2\pi$, и

$$\sqrt[n]{z} \rightarrow \cos \frac{2\pi + 2\pi(n-1)}{n} + i \sin \frac{2\pi + 2\pi(n-1)}{n} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1,$$

т.е. то самое значение, с которого мы начинали на верхнем краю разреза

листа D_0 . Таким образом, *функция $\sqrt[n]{z}$ будет непрерывной во всех точках римановой поверхности*. Как функция, обратная к аналитической, она является также однозначной аналитической функцией на этой поверхности (кроме точек $z=0$ и $z=\infty$).

Возьмем любую окружность $|z|=r$ на комплексной плоскости, охватывающую точку $z=0$. Эта окружность будет охватывать также и точку $z=\infty$. Обходя контур на римановой поверхности, состоящий из точек, расположенных над этой окружностью, мы будем переходить с одного листа римановой поверхности на другой. Поэтому точки $z=0$ и $z=\infty$ называются *точками ветвления*. Ни одна другая точка описанным свойством не обладает: если взять окружность с центром в точке $z \neq 0$, $z \neq \infty$, не содержащую внутри себя точку 0, то соответствующие точки на римановой поверхности образуют n окружностей, не связанных друг с другом. Обходя каждую из них, мы не выйдем за пределы одного и того же листа.

Однозначная аналитическая в области D функция $f(z)$ называется *регулярной ветвью* многозначной функции $F(z)$,

определенной в этой же области, если значение $f(z)$ в каждой точке z области D совпадает с одним из значений $F(z)$ в этой точке.

Многозначная функция $F(z)$ является однозначной и аналитической на своей римановой поверхности (за исключением точек ветвления). Поэтому возможность выделить в области D регулярную ветвь означает возможность расположить эту область на римановой поверхности, не разрезая D и не задевая точек ветвления. Область D должна при этом целиком укладываться на одном листе или спускаться по склейке с одного листа на другой (как ковер по лестнице).

Например, кольцо $1 < |z| < 2$ нельзя без разрывов расположить на римановой поверхности функции $F(z) = \sqrt[n]{z}$, $n \geq 2$, поскольку точки кольца, находящиеся над положительной полуосью, должны одновременно попасть на разные листы, что невозможно. Но если разрезать кольцо по любому радиусу, то такое расположение становится возможным. При этом расположить D на римановой поверхности можно n способами (и, следовательно, выделить в D n различных ветвей функции $\sqrt[n]{z}$). Для выделения конкретной ветви достаточно указать значение функции в какой-либо точке области D . Тем самым указывается лист римановой поверхности, на который попадает эта точка, а значит, фиксируется расположение и всей области D .

Пример 10.1. Выделить регулярную ветвь $f(z)$ функции $w = \sqrt[4]{z}$, задаваемую условием $w(1) = i$, в области $D = \left\{ -\frac{3\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2} \right\}$. Найти $f(-i)$.

Решение. Область D является комплексной плоскостью с разрезом по мнимой полуоси $y \geq 0$. Значит, выделение регулярной ветви в D возможно. По формуле (2.10)

$$F(z) = \sqrt[4]{z} = \sqrt[4]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi k}{n} \right) \quad \text{при } k = 0, 1, 2, 3 \quad \text{и}$$

$$-\frac{3\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

Чтобы выделить ветвь $f(z)$, нужно найти подходящее значение k .
 Так как $f(1) = i$, то подставляя $\varphi = 0$, $r = 1$ получим

$$i = \cos \frac{2\pi k}{4} + i \sin \frac{2\pi k}{4},$$

откуда получаем $k = 1$. Итак, нужная ветвь

$$f(z) = \sqrt[4]{r} \left(\cos \frac{\varphi + 2\pi}{2} + i \sin \frac{\varphi + 2\pi}{2} \right) \text{ при } -\frac{3\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}.$$

В частности,

$$f(-i) = \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{-\pi/2 + 2\pi}{2} + i \sin \frac{-\pi/2 + 2\pi}{2} \right) = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

§11. Показательная и логарифмическая функции

Показательная функция e^z комплексного переменного z определяется следующими соотношениями: для любого комплексного числа $z = x + iy$

$$e^z = e^{x+iy} = e^x (\cos y + i \sin y). \quad (11.1)$$

Второе равенство в (11.1) получается, если принять по определению $e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy}$ и применить к e^{iy} формулу Эйлера (2.12). Из (11.1) следует, что

$$|e^z| = |e^{x+iy}| = e^x; \operatorname{Arg} e^z = y + 2\pi n.$$

Определение (11.1) и свойства функции $e^{i\varphi}$ позволяют легко доказать, что функция e^z обладает обычными свойствами показательной функции:

$$e^{z_1+z_2} = e^{z_1} \cdot e^{z_2}; e^{z_1-z_2} = e^{z_1}/e^{z_2}; (e^z)^n = e^{nz}.$$

Докажем первое из этих свойств. Пусть $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. Применяя (11.1) и (2.13), получим:

$$e^{z_1} \cdot e^{z_2} = e^{x_1} \cdot e^{iy_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{iy_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2} \cdot e^{iy_1} \cdot e^{iy_2} = e^{x_1+x_2} \cdot e^{i(y_1+y_2)} = e^{z_1+z_2}.$$

Читатель без труда докажет остальные два свойства самостоятельно.

Докажем, что функция e^z будет аналитической во всей комплексной плоскости C . Для этого надо проверить выполнимость условий Коши-Римана (6.4). Если $w = u + iv$, то в силу (11.1) $u + iv = e^x \cos y + ie^x \sin y$, откуда

$$u = e^x \cos y, v = e^x \sin y; \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y; \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x} = -e^x \sin y.$$

Таким образом, условия (6.4) выполнены, и аналитичность функции e^z доказана. Чтобы вычислить производную $(e^z)'$, воспользуемся независимостью производной от направления и вычислим производную в направлении оси OX :

$$(e^z)' = \frac{\partial}{\partial x}(e^x(\cos y + i \sin y)) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Следовательно, для производной функции e^z имеет место обычная формула:

$$(e^z)' = e^z.$$

Следующее свойство функции e^z не имеет аналога в случае показательной функции действительного переменного: функция e^z является периодической с чисто мнимым периодом $2\pi i$. В самом деле, для любого целого n

$$e^{z+2\pi ni} = e^x(\cos(y+2\pi n) + i \sin(y+2\pi n)) = e^x(\cos y + i \sin y) = e^z.$$

Из периодичности функции $w = e^z$ следует, в частности, что она не является однолистной во всей комплексной плоскости. Для выяснения, в каких областях эта функция однолистка, положим $z_1 = x_1 + iy_1$, $z_2 = x_2 + iy_2$. В силу (11.1), равенство $e^{z_1} = e^{z_2}$ равносильно следующим условиям:

$$e^{x_1} = e^{x_2}, \cos y_1 = \cos y_2, \sin y_1 = \sin y_2,$$

откуда следует $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2 + 2\pi n$, где n – произвольное целое число, или

$$z_1 - z_2 = 2\pi ni. \quad (11.2)$$

Следовательно, для взаимной однозначности отображения $w = e^z$ в области D необходимо и достаточно, чтобы D не содержала никакой пары точек, для которой справедливо (11.2). В частности, этому условию удовлетворяет любая горизонтальная полоса шириной 2π , например полосы

$$-\infty < x < \infty, \quad 2k\pi < y < 2(k+1)\pi, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Каждой такой полосе соответствует совокупность значений $w = e^z = \rho e^{i\theta}$, для которых, в силу равенств $\rho = e^x$, $\theta = y$, имеем

$$0 < \rho < \infty, \quad 2k\pi < \theta < 2(k+1)\pi.$$

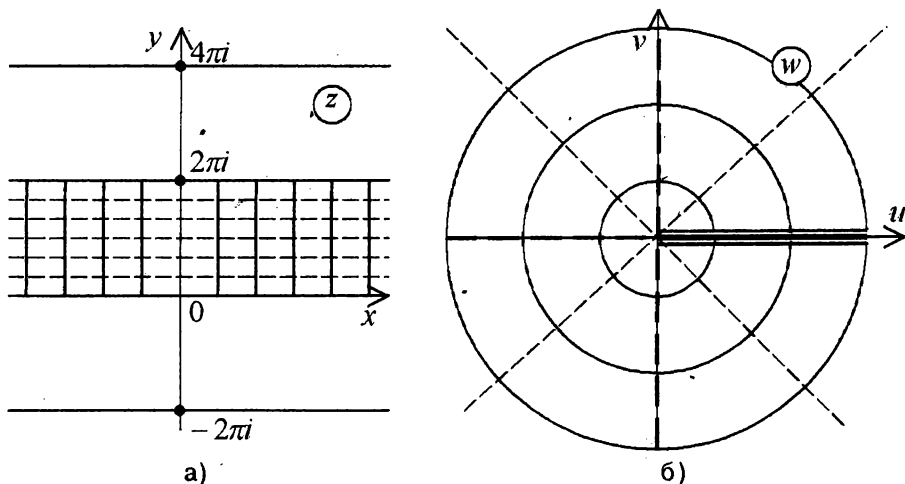


Рис.24

Эти значения w заполняют всю комплексную плоскость переменного w с разрезом по действительной положительной полуоси (рис.24). При этом прямые $y = y_0$ (показаны на рис.24а пунктиром) переходят в лучи $\theta = y_0$ (рис.24б), а интервалы $x = x_0$, $2k\pi < y < 2(k+1)\pi$ (показаны сплошными линиями для $k = 0$) – в окружности $\rho = e^{x_0}$ (с выколотыми точками на полуоси $u > 0$). Полосы $0 < \text{Im } z < h < 2\pi$ показательная функция e^z отображает в углы $0 < \theta < h$. В частности, полоса $0 < \text{Im } z < \pi$ переводится в верхнюю полуплоскость.

Логарифмической функцией комплексного переменного z называется функция, обратная показательной.

Так как показательная функция e^z не является однолистной в C , то обратная к ней функция будет многозначной. Эта многозначная логарифмическая функция обозначается $\text{Ln}z$. Таким образом, если $w = \text{Ln}z$, то $z = e^w$. Положим

$$w = u + iv, \quad z = re^{i\varphi} = re^{i\text{Arg}z},$$

тогда

$$re^{i\text{Arg}z} = z = e^w = e^{u+iv} = e^u \cdot e^{iv}.$$

Сравнивая числа, стоящие слева и справа этой цепочки, заключаем, что

$$r = e^u, \quad e^{i\text{Arg}z} = e^{iv}. \quad (11.3)$$

Из первого равенства находим $u = \ln r$, где $\ln r$ – обычный натуральный логарифм положительного числа r . Второе равенство в (11.3) дает $v = \text{Arg}z$. Таким образом,

$$\text{Ln}z = \ln|z| + i\text{Arg}z. \quad (11.4)$$

Каждому комплексному числу z , отличному от 0 и ∞ , формула (11.4) ставит в соответствие бесконечное множество значений $\text{Ln}z$, отличающихся друг от друга на величину $2\pi ki$, где k – любое целое число. Удобно представить $\text{Arg}z$ в виде

$$\text{Arg}z = \arg z + 2\pi k \text{ при } -\pi < \arg z \leq \pi,$$

где $\arg z$ – главное значение аргумента. Тогда формула (11.4) примет вид:

$$\text{Ln}z = \ln|z| + i(\arg z + 2\pi k). \quad (11.5)$$

Для каждого значения k функция $\text{Ln}z$ является непрерывной однозначной функцией в комплексной плоскости с разрезом по отрицательной полуоси; она также и аналитична в этой области как функция, обратная аналитической функции e^z . Таким образом, для каждого фиксированного k формула (11.5) определяет регулярную ветвь многозначной функции $\text{Ln}z$. Эта ветвь взаимно-однозначно отображает плоскость с разрезом по отрицательной полуоси в полосу

$$-\pi + 2\pi k < \text{Im } w < \pi + 2\pi k.$$

Ветвь, которая получается при $k=0$, обозначается $\ln z$ и называется **главным значением многозначной функции $\text{Ln} z$** :

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z.$$

Например, $\ln i = \ln 1 + i\pi/2 = i\pi/2$; $\ln(-i) = \ln 1 - i\pi/2 = -i\pi/2$;
 $\ln(-1+i0) = \ln 1 + i\pi = i\pi$; $\ln(-1-i0) = \ln 1 - i\pi = -i\pi$.

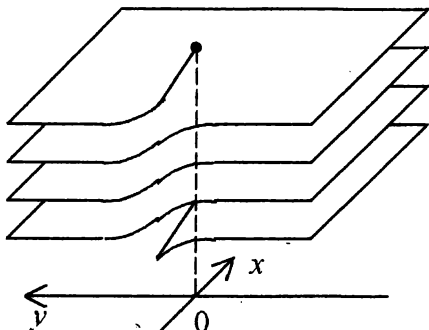


Рис.25

Чтобы представить себе риманову поверхность функции

$\text{Ln} z$, возьмем бесконечное количество экземпляров ("листов") плоскости с разрезом по отрицательной полуоси и склеим их так, как показано на рис.25. Над каждой точкой плоскости, кроме точек

$z=0$ и $z=\infty$, располагается бесконечно много точек римановой поверхности. В точках 0 и ∞ функция $\text{Ln} z$ не определена, и точек

поверхности над ними нет. Точки $z=0$ и $z=\infty$ называются **точками ветвления бесконечного порядка**.

Рис.25 наглядно демонстрирует причину того, что $\ln(-1+i0) \neq \ln(-1-i0)$. Если предположить, что точки $-1 \pm ih$ находятся на одном и том же листе римановой поверхности и устремить h к нулю, то предельные положения $-1+i0$ и $-1-i0$ этих точек окажутся на разных листах римановой поверхности.

Выделить регулярную ветвь логарифма можно не только в области D , являющейся плоскостью с разрезом по отрицательной полуоси. Если сделать разрез плоскости по любому лучу, то полученная область также допускает выделение в ней регулярной ветви. Пусть разрез сделан по лучу, идущему под углом θ к оси OX . Тогда регулярные ветви будут задаваться следующей формулой: при $z = re^{i\varphi}$, $\theta < \varphi < \theta + 2\pi$

$$\text{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k).$$

Формула (11.5) является частным случаем при $\theta = -\pi$.

В заключение данного раздела отметим, что производная каждой

регулярной ветви $f(z)$ логарифма находится по формуле

$$f'(z) = \frac{1}{z},$$

аналогичной формуле для производной логарифма действительного переменного. Этот факт выводится из равенства $(e^z)' = e^z$ и формулы производной обратной функции, которая доказывается так же, как и в случае функции действительного переменного.

§12. Общая степенная и тригонометрические функции

Общая степенная функция $w = z^a$, где $a = \alpha + i\beta$ – фиксированное комплексное число, определяется соотношением

$$z^a = e^{a \operatorname{Ln} z}.$$

Полагая $z = re^{i\varphi}$, получаем $\operatorname{Ln} z = \ln r + i(\varphi + 2\pi k)$.

Следовательно,

$$z^a = e^{(\alpha + i\beta)(\ln r + i(\varphi + 2\pi k))} = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2\pi k)} \cdot e^{i(\alpha(\varphi + 2\pi k) + \beta \ln r)}.$$

Отсюда видно, что при $\beta \neq 0$ функция $|z^a| = e^{\alpha \ln r - \beta(\varphi + 2\pi k)}$ принимает бесконечное множество значений. В этом случае говорят, что функция является бесконечнозначной. Таким образом, при $\beta \neq 0$ функция z^a будет бесконечнозначной.

Пример 12.1. Найти все значения функции $w = z^i$ в точке $z = i$.

Решение. Поскольку $\operatorname{Ln} i = \ln 1 + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)i$, то

$$i^i = e^{i \operatorname{Ln} i} = e^{i\left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)i} = e^{-\frac{\pi}{2} - 2\pi k} \quad \text{при } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

При $\beta = 0$ получаем

$$z^a = e^{\alpha \ln r} \cdot e^{i\alpha(\varphi + 2\pi k)}. \quad (12.1)$$

Отсюда следует, что значения степенной функции отличаются лишь аргументами $\theta_k = \alpha(\varphi + 2\pi k)$. Если α – рациональное число, т.е. оно

представимо несократимой дробью $\alpha = \frac{m}{n}$ (m и n – целые числа), то среди θ_k имеется лишь n значений, определяющих различные значения z^a :

$$\theta_k = \frac{m}{n}\varphi + \frac{2\pi mk}{n} \text{ при } k = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

При $k = n, n+1, \dots$ мы получим значения θ_k , отличающиеся от уже известных на числа, кратные 2π . Значит, для таких значений k мы не получим новых точек z^a . Итак, при $a = m/n$ формула (12.1) дает (мы пользуемся также равенством $e^{\alpha \ln r} = r^\alpha$ для действительных чисел r, α):

$$z^{m/n} = r^{m/n} \left(\cos \frac{m(\varphi + 2\pi k)}{n} + i \sin \frac{m(\varphi + 2\pi k)}{n} \right) \text{ при } k = 0, 1, \dots, n-1.$$

Сравнивая эту формулу с (2.10) мы видим, что

$$z^{m/n} = \sqrt[n]{z^m}.$$

Итак, для рациональных чисел a функция z^a является конечнозначной. При иррациональных (действительных) $a = \alpha$ среди значений аргумента $\theta_k = \alpha(\varphi + 2\pi k)$ нет чисел, отличающихся друг от друга на величины, кратные 2π . (Если бы нашлись такие натуральные числа k_1, k_2, l , что $\theta_{k_2} - \theta_{k_1} = 2\pi l$, т.е. $2\pi k_2 \alpha - 2\pi k_1 \alpha = 2\pi l$ и $k_1 \neq k_2$, то

$\alpha = \frac{l}{k_2 - k_1}$ и, следовательно, α – рациональное число, что

противоречило бы сделанному предположению.) Поэтому для иррациональных чисел a функция z^a бесконечнозначна. Ее риманова поверхность такая же, как и риманова поверхность логарифма.

Общая степенная функция $w = z^a$ в силу своего определения допускает выделение регулярных ветвей там же, где логарифм; например, в плоскости с разрезом по лучу. Ветвь

$$e^{a \ln z} = e^{a(\ln|z| + i \arg z)},$$

выделенная в плоскости с разрезом вдоль отрицательной полуоси, называется *главной ветвью степенной функции*. В силу теоремы о производной сложной функции для каждой регулярной ветви степенной функции справедливы равенства

$$\frac{d}{dz} z^a = \frac{d}{dz} e^{af(z)} = e^{af(z)} \cdot af'(z) = z^a \cdot a \cdot \frac{1}{z} = az^{a-1},$$

где $f(z)$ – регулярная ветвь логарифмической функции $\operatorname{Ln} z$.

Мы получили обычную формулу для производной степенной функции: $(z^a)' = az^{a-1}$.

Перейдем к тригонометрическим функциям. Для действительных значений x из формулы Эйлера (2.12) следует, что

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

$$\text{Отсюда } \cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

Эти формулы служат основой следующего определения.

Тригонометрические функции комплексного переменного z определяются равенствами:

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}, \quad \sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i},$$

$$\operatorname{tg} z = \frac{\sin z}{\cos z}, \quad \operatorname{ctg} z = \frac{\cos z}{\sin z}. \quad (12.2)$$

Определенные таким образом функции сохраняют многие свойства тригонометрических функций действительного переменного. Из периодичности функции e^z следует, что функции $\sin z$ и $\cos z$ периодичны с периодом 2π , а $\operatorname{tg} z$ и $\operatorname{ctg} z$ – с периодом π . Функция $\sin z$ нечетна, а $\cos z$ – четна. Действительно,

$$\sin(-z) = \frac{e^{-iz} - e^{-i(-z)}}{2i} = -\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = -\sin z.$$

Аналогично доказывается четность функции $\cos z$ (докажите!). Для функций, определенных равенствами (12.2), справедливы обычные

тригонометрические соотношения. Например,

$$\sin^2 z + \cos^2 z = 1, \quad \sin(z_1 + z_2) = \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2,$$

и т.д. Все эти соотношения вытекают из (12.2). Докажем, например, последнюю формулу:

$$\begin{aligned} \sin z_1 \cos z_2 + \cos z_1 \sin z_2 &= \frac{e^{iz_1} - e^{-iz_1}}{2i} \cdot \frac{e^{iz_2} + e^{-iz_2}}{2} + \frac{e^{iz_1} + e^{-iz_1}}{2} \cdot \frac{e^{iz_2} - e^{-iz_2}}{2i} = \\ &= \frac{e^{i(z_1+z_2)} - e^{-i(z_1+z_2)}}{2i} = \sin(z_1 + z_2). \end{aligned}$$

Функции $\sin z$ и $\cos z$ аналитичны во всей плоскости C , причем имеют место обычные формулы дифференцирования:

$$(\sin z)' = \cos z, \quad (\cos z)' = -\sin z.$$

Например, для $\sin z$ имеем:

$$\begin{aligned} (\sin z)' &= \left(\frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} \right)' = \frac{1}{2i} \left((e^{iz})' - (e^{-iz})' \right) = \frac{1}{2i} (ie^{iz} + ie^{-iz}) = \\ &= \frac{1}{2} (e^{iz} + e^{-iz}) = \cos z. \end{aligned}$$

Используя формулы для производной частного, получим

$$(\operatorname{tg} z)' = \frac{1}{\cos^2 z}; \quad (\operatorname{ctg} z)' = -\frac{1}{\sin^2 z}.$$

Однако не все свойства тригонометрических функций действительного переменного сохраняются при продолжении этих функций в комплексную плоскость. В частности, $\sin z$ и $\cos z$ могут принимать значения, по модулю превосходящие 1. Например,

$$\cos i = \frac{e^{i^2} + e^{-i^2}}{2} = \frac{e^{-1} + e^1}{2} \approx 1,54, \quad \sin i = \frac{e^{-1} - e^1}{2i} \approx -1,17i.$$

Функции, обратные (12.2), называются *обратными тригонометрическими функциями*. Так как тригонометрические функции (12.2) периодичны, то обратные к ним функции будут бесконечнозначными. В силу того, что функции (12.2) достаточно просто выражаются через показательные, обратные к ним функции удастся выразить через логарифмы. Получим такое выражение, например, для

$w = \text{Arc cos } z$. Из определения этой функции имеем:

$$z = \cos w = \frac{e^{iw} + e^{-iw}}{2},$$

откуда $e^{2iw} - 2ze^{iw} + 1 = 0$. Решая это квадратное уравнение

относительно e^{iw} , находим $e^{iw} = z + \sqrt{z^2 - 1}$ (мы опускаем “±” перед знаком квадратного корня, поскольку понимаем корень как двужначную функцию, принимающую оба соответствующие значения). Из последнего равенства получаем

$$w = \text{Arc cos } z = -i \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

В силу соотношения $(z + \sqrt{z^2 - 1})(z - \sqrt{z^2 - 1}) = 1$ изменение знака перед корнем приводит к изменению знака перед логарифмом. Но корень принимает значения как с “+” так и с “-”. Значит, и среди значений $\text{Arc cos } z$ будут числа как с “+”, так и с “-” перед логарифмом. Поэтому знак “-” можно не писать:

$$\text{Arc cos } z = i \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}). \quad (12.3)$$

Аналогичные формулы можно дать и для других обратных тригонометрических функций:

$$\begin{aligned} \text{Arc sin } z &= \frac{\pi}{2} - \text{Arccos } z = \frac{\pi}{2} - i \text{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}); \\ \text{Arctg } z &= \frac{\pi}{2} - \text{Arcctg } z = \frac{1}{2i} \text{Ln} \frac{i - z}{i + z}. \end{aligned} \quad (12.4)$$

Из элементарных функций комплексного переменного отметим также *гиперболические функции* $\text{sh } z$, $\text{ch } z$, $\text{th } z$ и $\text{cth } z$, определяемые равенствами:

$$\begin{aligned} \text{sh } z &= \frac{e^z - e^{-z}}{2}, \quad \text{ch } z = \frac{e^z + e^{-z}}{2}, \\ \text{th } z &= \frac{\text{sh } z}{\text{ch } z} = \frac{e^z - e^{-z}}{e^z + e^{-z}}, \quad \text{cth } z = \frac{\text{ch } z}{\text{sh } z} = \frac{e^z + e^{-z}}{e^z - e^{-z}}. \end{aligned} \quad (12.5)$$

Они весьма просто выражаются через тригонометрические функции

$$\operatorname{sh} z = -i \sin iz, \quad \operatorname{ch} z = \cos iz,$$

$$\operatorname{th} z = -i \operatorname{tg} iz, \quad \operatorname{cth} z = i \operatorname{ctg} iz,$$

и поэтому несущественно отличаются от последних.

Пример 12.2. Найти $\operatorname{Arc} \sin 2$.

Решение. По формуле (12.4),

$$\operatorname{Arc} \sin 2 = \frac{\pi}{2} - i \operatorname{Ln}(2 \pm \sqrt{3}).$$

(Мы поставили “ $\pm$ ” перед корнем, поскольку $\sqrt{3}$ обычно понимается как арифметическое значение корня). Для вычисления логарифма используем формулу (11.5), в которой полагаем $|z| = 2 \pm \sqrt{3}$ и $\arg z = 0$. Получаем:

$$\operatorname{Arc} \sin 2 = \frac{\pi}{2} - i \ln(2 \pm \sqrt{3}) + 2\pi k = \frac{\pi}{2} \pm i \ln(2 + \sqrt{3}) + 2\pi k,$$

где $\sqrt{3}$ – арифметическое значение корня и k – любое целое число.

Мы не приводим исследование свойств функции Жуковского

$$w = \frac{1}{2} \left(z + \frac{1}{z} \right), \quad (12.6)$$

имеющей важные применения в теории крыла самолета, а также весьма полезной при построении ряда конформных отображений. Отметим лишь, что эта функция аналитична всюду в плоскости z , кроме точек $z = 0$ и $z = \infty$; она конформно отображает как внутренность, так и внешность единичного круга $|z| < 1$ на всю плоскость w с разрезом по отрезку $[-1, 1]$.

Мы не останавливаемся также на свойствах отображений, осуществляемых тригонометрическими функциями, отсылая читателя, интересующегося этими вопросами, к учебникам [1] – [3].

§13. Общие свойства конформных отображений

В предыдущих разделах мы рассматривали некоторые элементарные функции и осуществляемые ими конформные отображения. Возникает вопрос: можно ли осуществить взаимно-однозначное конформное отображение произвольной области D на

произвольную область D' ? Используя непрерывность конформного отображения нетрудно убедиться, что ответ на этот вопрос, вообще говоря, отрицательный. Например, *многосвязную область нельзя взаимно-однозначно и непрерывно отобразить на односвязную*. Для односвязных областей имеет место следующая теорема.

Теорема Римана. Пусть D и D' – односвязные области на расширенных плоскостях переменных z и w соответственно, причем границы этих областей состоят более чем из одной точки. Тогда существует аналитическая функция, взаимно-однозначно и конформно отображающая D на D' .

Из теоремы Римана следует, что односвязную область D нельзя конформно отобразить на единичный круг $|w| < 1$ только в двух случаях:

а) если D есть вся расширенная плоскость $\bar{C}$ (граница – пустое множество);

б) если D есть расширенная плоскость, из которой удалена одна-единственная точка (например, если D – конечная плоскость C , когда из C удалена точка $z = \infty$).

Отображение $w = f(z)$ области D на D' , существующее по теореме Римана, не является единственным. Для однозначного определения конформного отображения нужно задать дополнительные условия, называемые *условиями нормировки*, содержащие три действительных параметра. Например, достаточно в какой-либо одной точке z_0 области D задать значения

$$w_0 = f(z_0), \quad \beta = \arg f'(z_0). \quad (13.1)$$

(Здесь в качестве параметров выступают две координаты точки w_0 и действительное число β .) Условия (13.1) означают, что отображение $w = f(z)$ является единственным, если для какой-либо точки z_0 области D задать ее образ w_0 в области D' и угол поворота β бесконечно малых векторов в точке z_0 .

Можно задавать и другие условия нормировки, отличные от (13.1). Например, задают образы одной внутренней и одной граничной точек области D :

$$f(z_0) = w_0, f(z_1) = w_1,$$

где z_0, w_0 – внутренние точки областей D, D' ; z_1, w_1 – граничные точки этих областей. Здесь также присутствуют три действительных параметра: две координаты точки w_0 и положение граничной точки w_1 , которая определяется одним действительным числом (например, расстоянием, отложенным по границе D' от некоторой фиксированной граничной точки). Укажем еще один вариант условий нормировки:

$$f(z_k) = w_k, k = 1, 2, 3,$$

где z_k и w_k – граничные точки областей D и D' .

Отметим, что для функции (9.10), конформно отображающей единичный круг $|z| < 1$ в единичный круг $|w| < 1$, тремя действительными параметрами являются координаты точки z_0 и число φ .

Сформулируем следующее общее свойство конформных отображений.

При взаимно-однозначном и конформном отображении областей D и D' сохраняется направление обхода их границ.

Другими словами, если при обходе границы область D остается слева, то и при соответствующем обходе границы области D' эта область остается слева.

Большое значение для практики конформных отображений имеет принцип соответствия границ. Пусть односвязные области D и D' ограничены кривыми Γ и Γ' . Пусть, далее, функция $w = f(z)$, аналитическая в D и непрерывная в $\bar{D}$, отображает Γ взаимно-однозначно на Γ' , причем, когда точка z обходит контур Γ так, что область D остается слева, соответствующая точка w обходит контур Γ' так, что область D' также остается слева. Тогда функция $w = f(z)$ осуществляет взаимно-однозначное конформное отображение области D на область D' .

Следовательно, для отыскания области, на которую функция $w = f(z)$ отображает заданную область D , достаточно обойти границу

области D и найти контур, на который эта граница отображается функцией $f(z)$.

Пример 13.1. Найти область, на которую функция Жуковского (12.2) отображает круг $|z| < 1/2$.

Решение. Положив $z = re^{i\varphi}$, найдем

$$w = u + iv = \frac{1}{2} \left(re^{i\varphi} + \frac{1}{r} e^{-i\varphi} \right) = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi + i \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi,$$

откуда

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left(r - \frac{1}{r} \right) \sin \varphi. \end{cases} \quad (13.2)$$

Чтобы определить искомую область, найдем образ окружности $r = |z| = 1/2$. Из уравнений (13.2) имеем

$$\begin{cases} u = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 2 \right) \cos \varphi = \frac{5}{4} \cos \varphi, \\ v = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - 2 \right) \sin \varphi = -\frac{3}{4} \sin \varphi. \end{cases} \quad (13.3)$$

Уравнения (13.3) являются параметрическими уравнениями эллипса с полуосями $a = 5/4$ и $b = 3/4$. Если обходить окружность $|z| = 1/2$ против часовой стрелки, оставляя круг $|z| < 1/2$ слева (т.е. изменять φ от 0 до 2π), то соответствующая точка $w = u + iv$ будет двигаться по эллипсу по часовой стрелке (в силу наличия знака “-” перед $3/4 \sin \varphi$). При этом слева будет оставаться внешность эллипса.

Таким образом, круг $|z| < 1/2$ будет отображаться функцией Жуковского на внешность эллипса с полуосями $a = 5/4$ и $b = 3/4$.

В заключение приведем еще одно общее свойство – *принцип сохранения области*. Если функция $w = f(z)$ аналитична в области D и отлична от постоянной, то множество D' , на которое она отображает D , также является областью (т.е. открытым связным множеством).

ГЛАВА V. ИНТЕГРИРОВАНИЕ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

§14. Интеграл от функции комплексного переменного

Рассмотрим гладкую кривую Γ на комплексной плоскости, заданную параметрическими уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (14.1)$$

(Определение гладкой кривой дано в начале §8). Как уже отмечалось в §8, эти уравнения можно записать в компактной форме

$$z(t) = x(t) + iy(t), \quad \alpha \leq t \leq \beta. \quad (14.2)$$

При изменении параметра t от α до β соответствующая точка $z(t)$ будет двигаться по кривой Γ . Поэтому уравнения (14.1) и (14.2) не только определяют точки кривой Γ , но и задают направление обхода этой кривой. Кривая Γ с заданным направлением ее обхода называется *ориентированной кривой*.

Пусть в области $D \subset \mathbb{C}$ задана непрерывная функция $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, и пусть кривая Γ лежит в D . Чтобы ввести понятие интеграла $\int_{\Gamma} f(z) dz$ от функции $f(z)$ по кривой Γ , определим

дифференциал dz равенством $dz = dx + idy$. Подынтегральное выражение преобразуется к виду

$$f(z) dz = (u + iv)(dx + idy) = (udx - vdy) + i(vdx + udy).$$

Таким образом, интеграл от комплексной функции $f(z)$ по кривой Γ естественно определить равенством

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma} udx - vdy + i \int_{\Gamma} vdx + udy, \quad (14.3)$$

в правую часть которого входят два действительных криволинейных интеграла второго рода от действительных функций u и v . Для вычисления этих интегралов следует вместо x и y подставить функции $x(t)$ и $y(t)$, а вместо dx и dy – дифференциалы этих функций $dx = x'(t)dt$ и $dy = y'(t)dy$. Тогда интегралы в правой части (14.3) сведутся к двум интегралам от функций действительного переменного

t по отрезку (α, β) :

$$\int_{\alpha}^{\beta} (u(z(t))x'(t) - v(z(t))y'(t))dt + i \int_{\alpha}^{\beta} (v(z(t))x'(t) + u(z(t))y'(t))dt. \quad (14.4)$$

Это выражение легко преобразуется к виду

$$\int_{\alpha}^{\beta} (u(z(t)) + iv(z(t)))(x'(t) + iy'(t))dt = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt.$$

Теперь мы готовы дать следующее определение.

Интегралом вдоль кривой Γ от функции комплексного переменного называется число, обозначаемое $\int_{\Gamma} f(z)dz$ и вычисляемое по формуле

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t))z'(t)dt, \quad (14.5)$$

где $z(t) = x(t) + iy(t)$ при $\alpha \leq t \leq \beta$ – уравнение кривой Γ ,

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t).$$

Пример 14.1. Вычислить интеграл от функции $f(z) = (z - a)^n$ по окружности радиуса r с центром a , направление обхода которой – против часовой стрелки.

Решение. Уравнение окружности $|z - a| = r$ будет $z - a = re^{it}$, или

$$z(t) = a + r(\cos t + i \sin t) \text{ при } 0 \leq t \leq 2\pi.$$

При изменении t от 0 до 2π точка $z(t)$ движется по Γ против часовой стрелки. Тогда

$$f(z(t)) = (z(t) - a)^n = r^n (\cos t + i \sin t)^n;$$

$$z'(t) = r(-\sin t + i \cos t) = ir(\cos t + i \sin t).$$

Согласно равенству (14.5), имеем

$$\int_{\Gamma} (z - a)^n dz = \int_0^{2\pi} ir^{n+1} (\cos t + i \sin t)^{n+1} dt =$$

$$= ir^{n+1} \int_0^{2\pi} \cos(n+1)t dt + i^2 r^{n+1} \int_0^{2\pi} \sin(n+1)t dt.$$

При $n \neq -1$ оба последних интеграла равны нулю. При $n = -1$ имеем

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{z-a} dz = i \int_0^{2\pi} dt = i \cdot 2\pi. \quad (14.6)$$

Мы получили результат, важный для дальнейшего:

$$\int_{\Gamma} (z-a)^n dz = \begin{cases} 0 & \text{при } n \neq -1, \\ 2\pi i & \text{при } n = -1, \end{cases} \quad \Gamma: |z-a|=r. \quad (14.7)$$

Заметим, что значение интеграла не зависит от радиуса r окружности.

Пример 14.2. Вычислить интеграл от функции $f(z)=1$ по гладкой кривой Γ с началом в точке a и концом в точке b .

Решение. Пусть кривая Γ задается уравнением $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$, причем $a = z(\alpha)$, $b = z(\beta)$. Используя формулу (14.5), а также формулу Ньютона-Лейбница для вычисления интегралов от действительных функций, получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} 1 dz &= \int_{\alpha}^{\beta} z'(t) dt = \int_{\alpha}^{\beta} x'(t) dt + i \int_{\alpha}^{\beta} y'(t) dt = x(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} + i y(t) \Big|_{\alpha}^{\beta} = \\ &= x(\beta) - x(\alpha) + i(y(\beta) - y(\alpha)) = z(\beta) - z(\alpha) = b - a. \end{aligned}$$

Мы видим, что интеграл $\int 1 dz$ не зависит от вида пути, соединяющего

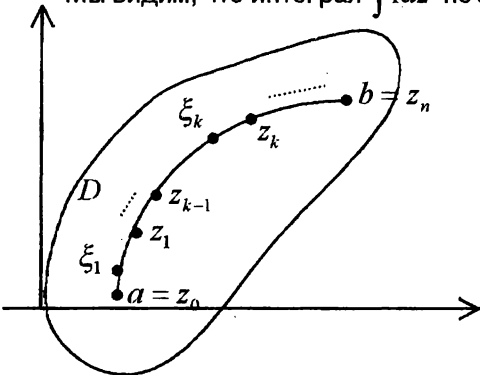


Рис.26

точки a и b , а зависит только от конечных точек.

Изложим вкратце другой подход к определению интеграла от комплексной функции $f(z)$ по кривой, аналогичный определению интеграла от действительной функции по отрезку.

Разобьем кривую Γ произвольным образом на n

участков точками $z_0 = a, z_1, \dots, z_{n-1}, z_n = b$, занумерованными в направлении движения от начальной точки к конечной (рис.26). Обозначим $z_1 - z_0 = \Delta z_1, \dots, z_k - z_{k-1} = \Delta z_k, z_n - z_{n-1} = \Delta z_n$. (Число Δz_k изображается вектором, идущим из точки z_{k-1} в z_k .) На каждом участке (z_{k-1}, z_k) кривой выберем произвольную точку ξ_k и составим сумму

$$f(\xi_1)\Delta z_1 + f(\xi_2)\Delta z_2 + \dots + f(\xi_n)\Delta z_n = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k.$$

Эта сумма называется *интегральной суммой*. Обозначим через λ длину наибольшего из участков, на которые разбита кривая Γ . Рассмотрим последовательность разбиений, для которой $\lambda \rightarrow 0$ (при этом $n \rightarrow \infty$).

Предел интегральных сумм, вычисленный при условии, что длина наибольшего из участков разбиения стремится к нулю, называется интегралом

от функции $f(z)$ по кривой Γ и обозначается $\int_{\Gamma} f(z)dz$:

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \sum_{k=1}^n f(\xi_k)\Delta z_k. \quad (14.8)$$

Можно показать, что это определение также приводит нас к формуле (14.3) и, следовательно, эквивалентно определению (14.5), данному выше.

Установим основные свойства интеграла $\int_{\Gamma} f(z)dz$.

1°. *Линейность*. Для любых комплексных постоянных a и b

$$\int_{\Gamma} (af(z) + bg(z))dz = a \int_{\Gamma} f(z)dz + b \int_{\Gamma} g(z)dz.$$

Это свойство следует из равенства (14.5) и соответствующих свойств интеграла по отрезку.

2°. *Аддитивность*. Если кривая Γ разбита на участки Γ_1 и Γ_2 , то

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_1} f(z)dz + \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Доказательство. Пусть кривая Γ с концами a, b разбита

точкой c на кривые Γ_1 с концами a, c и Γ_2 с концами c, b . Пусть Γ задается уравнением $z = z(t)$ при $\alpha \leq t \leq \beta$, причем $a = z(\alpha)$, $b = z(\beta)$, $c = z(\gamma)$. Тогда уравнения кривых Γ_1 и Γ_2 будут $z = z(t)$, где $\alpha \leq t \leq \gamma$ для Γ_1 и $\gamma \leq t \leq \beta$ для Γ_2 . Применяя определение (14.5) и соответствующие свойства интеграла по отрезку, получим:

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt = \int_{\alpha}^{\gamma} f(z(t)) z'(t) dt + \int_{\gamma}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt = \\ &= \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать.

Свойство 2° позволяет вычислять интегралы не только по гладким кривым, но также и по *кусочно-гладким кривым*, т.е. кривым, которые можно разбить на конечное число гладких участков.

3°. При изменении направления обхода кривой Γ интеграл меняет знак.

Доказательство. Пусть кривая Γ с концами a и b задается уравнением $z = z(t)$ при $\alpha \leq t \leq \beta$. Кривую, состоящую из тех же точек, что и Γ , но отличающуюся от Γ направлением обхода (ориентацией), обозначим через Γ^- . Тогда Γ^- задается уравнением $z = z_1(t) = z(\alpha + \beta - t)$ при $\alpha \leq t \leq \beta$. Введем новую переменную $\tau = \alpha + \beta - t$. Тогда $z'_1(t) = z'_\tau(\tau) \cdot (\alpha + \beta - t)'_t = -z'_\tau(\tau)$, $dt = -d\tau$. При изменении t от α до β переменная τ изменяется от β до α . Используя определение (14.5) и переходя к переменной τ , получим

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma^-} f(z) dz &= \int_{\alpha}^{\beta} f(z_1(t)) z'_1(t) dt = \int_{\beta}^{\alpha} f(z(\tau)) \cdot (-z'_\tau(\tau)) \cdot (-d\tau) = \\ &= - \int_{\alpha}^{\beta} f(z(\tau)) z'_\tau(\tau) d\tau = - \int_{\Gamma} f(z) dz. \end{aligned}$$

Свойство 3° доказано. (Заметим, что из определения интеграла (14.8) это свойство следует непосредственно: при изменении ориентации

кривой все приращения Δz_k меняют знак.)

4°. Модуль интеграла не превосходит значения криволинейного интеграла от модуля функции по длине кривой (криволинейного интеграла от $|f(z)|$ первого рода):

$$\left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| \leq \int_{\Gamma} |f(z)| |dz| = \int_{\Gamma} |f(z)| ds = \int_{\alpha}^{\beta} |f(z(t))| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Доказательство. Воспользуемся тем, что для интеграла по отрезку

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} g(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |g(t)| dt$$

(это неравенство сразу следует из определения интеграла по отрезку как предела интегральных сумм). Отсюда и из (14.5) имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Gamma} f(z) dz \right| &= \left| \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt \right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(z(t))| \cdot |z'(t)| dt = \\ &= \int_{\alpha}^{\beta} |f(z(t))| \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt. \end{aligned}$$

§15. Теорема Коши

Рассмотрим теперь интегралы от аналитических (однозначных) функций. Важную роль при этом играет следующая теорема:

Теорема 15.1 (теорема Коши для односвязной области).

Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D . Тогда для любого замкнутого контура Γ , лежащего в D , $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$.

Доказательство. Для краткости мы проведем доказательство при дополнительном предположении, что производная $f'(z)$ непрерывна в D . В силу равенства (14.3), для выполнения условия $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$ необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_{\Gamma} u dx - v dy = 0, \int_{\Gamma} v dx + u dy = 0. \quad (15.1)$$

Напомним, что если $P(x, y)$ и $Q(x, y)$ – непрерывные действительные функции в односвязной области D , имеющие в D непрерывные частные производные первого порядка, то равенство

$$\int_{\Gamma} P dx + Q dy = 0 \text{ равносильно следующему условию:}$$

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \quad (15.2)$$

(см. пособие [12]). Применительно к интегралам из (15.1) условие (15.2) имеет вид

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} \quad (15.3)$$

(Непрерывность частных производных функций u и v вытекает из непрерывности $f'(z)$). Но условия (15.3) совпадают с условиями Коши-Римана (6.4), которые выполнены в силу предположения о том, что функция $f(z)$ является аналитической в D . Таким образом, справедливы равенства (15.1), а значит и равенство $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, что и требовалось доказать.

В §17 будет показано, что справедливо также утверждение, обратное теореме 15.1 (теорема Морера).

Заметим, что если функция $f(z)$ является аналитической в замкнутой односвязной области $\bar{D}$, то в качестве Γ можно взять также границу этой области.

Рассмотрим теперь обобщение теоремы Коши на многосвязные области. Пусть D – n -связная область, граница которой состоит из внешнего контура Γ_1 и внутренних контуров $\Gamma_2, \dots, \Gamma_n$.

Теорема 15.2 (теорема Коши для n -связной области).
Предположим, что функция $f(z)$ аналитична в замкнутой n -связной области $\bar{D}$. Тогда интеграл от f по границе области $\bar{D}$ равен нулю; при этом предполагается, что обход граничных кривых проводится в таком

направлении, чтобы область D оставалась слева.

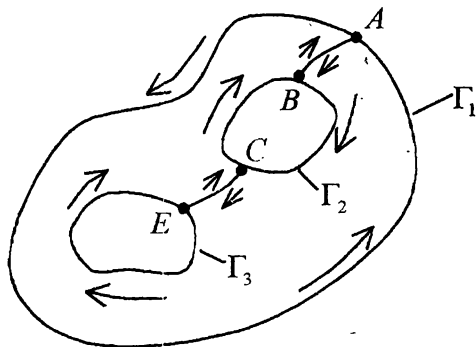


Рис.27

Доказательство.

Пусть, например, D – трехсвязная область, ограниченная контурами $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ (рис.27). Разрежем область D по дугам AB и CE , т.е. удалим из D все точки этих дуг. В результате получим односвязную область D^* , граница Γ^* которой состоит из контуров $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ и дуг AB и

CE . При обходе этой границы контуры $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ проходятся однократно, а дуги AB и CE – дважды в противоположных направлениях. Поскольку область D^* односвязна, то, в силу теоремы 15.1, интеграл по ее границе Γ^* равен нулю, а, в силу свойства 2°, интеграл по Γ^* распадается на сумму интегралов по участкам, составляющим Γ . Поэтому

$$0 = \int_{\Gamma^*} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \int_{\Gamma_3} f(z) dz + \int_{AB} f(z) dz + \int_{BA} f(z) dz + \int_{CE} f(z) dz + \int_{EC} f(z) dz.$$

Согласно свойству 3°, интегралы по AB и BA (и, аналогично, по CE и EC) отличаются лишь знаками, и поэтому сокращаются. Получаем

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \int_{\Gamma_3} f(z) dz = 0, \quad (15.4)$$

что и требовалось доказать.

Теорему 15.2 можно сформулировать в следующей форме.

Если функция $f(z)$ аналитична в замкнутой n -связной области D и все граничные контуры $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ обходятся в одном и том же направлении, то

$$\int_{\Gamma_1} f(z) dz = \int_{\Gamma_2} f(z) dz + \dots + \int_{\Gamma_n} f(z) dz, \quad (15.5)$$

где Γ_1 – внешний контур, охватывающий остальные.

Доказательство сразу получается из формулы (15.4), если у контуров $\Gamma_2, \dots, \Gamma_n$ (или у контура Γ_1) изменить направление обхода на противоположное и перенести соответствующие интегралы в другую часть равенства (15.4).

Теорема 15.1 эквивалентна следующему важному свойству **независимости интеграла $\int f(z)dz$ от пути интегрирования:**

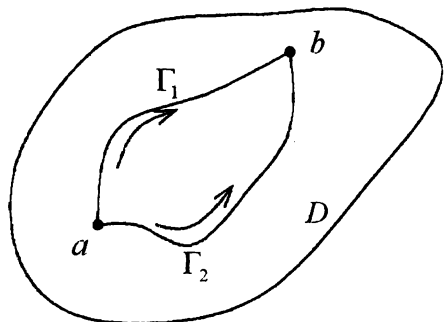


Рис.28

Следствие 15.3. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и пусть a и b – две любые точки из D . Тогда интегралы по всем кривым, идущим из a в b и лежащим внутри D , равны между собой.

Другими словами, интеграл зависит не от пути, а лишь от его начальной и конечной точек.

Доказательство. Пусть Γ_1 и Γ_2 – два пути, идущие из a в b . Обозначим через Γ_1^- кривую Γ_1 , проходимую в противоположном направлении, т.е. из b в a . По теореме 15.1 интеграл $\int_{\Gamma} f(z)dz$ по замкнутому контуру $\Gamma = \Gamma_2 \cup \Gamma_1^-$ равен нулю. Отсюда

$$0 = \int_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz + \int_{\Gamma_1^-} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz - \int_{\Gamma_1} f(z)dz,$$

и, следовательно,

$$\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz.$$

Следствие 15.3 доказано.

Точки z , в которых (однозначная) функция $f(z)$ является аналитической, называются *регулярными*, или *правильными*. Точки, в которых $f(z)$ не является аналитической, в том числе точки, в которых $f(z)$ не определена, называются **особыми точками функции $f(z)$** .

Особая точка z_0 называется **изолированной особой точкой**, если найдется такая окрестность с центром z_0 , в каждой точке которой, за исключением самой точки z_0 , функция $f(z)$ является аналитической.

Следствие 15.4 (неизменяемость интеграла при деформации пути интегрирования). Интеграл от аналитической функции $f(z)$ по кривой Γ (замкнутой или незамкнутой) не изменяет своей величины при любой непрерывной деформации кривой Γ , если только при этой деформации кривая Γ не пересекает особых точек функции $f(z)$; в случае незамкнутой кривой Γ подразумевается, что при деформации начало и конец Γ остаются неподвижными.

Доказательство. Для незамкнутой кривой нужно утверждение вытекает из следствия 15.3, поскольку при непрерывной деформации кривой Γ_1 в Γ_2 функция $f(z)$ будет аналитической в односвязной области, заключенной между ними (см. рис.28). (Действительно, если между Γ_1 и Γ_2 есть хотя бы одна особая точка функции $f(z)$, то непрерывная деформация Γ_1 в Γ_2 без пересечения этой точки невозможна.) Для замкнутого контура равенство $\int_{\Gamma_1} f(z)dz = \int_{\Gamma_2} f(z)dz$

сразу следует из формулы (15.5) при $n=2$, поскольку функция $f(z)$ будет аналитической в двусвязной области, ограниченной этими контурами.

Пример 15.5. Функция $f(z)=1/z$ аналитична во всей комплексной плоскости C за исключением точки $z=0$. Возьмем в качестве Γ окружность $|z|=1$. В силу (14.6),

$$\int_{|z|=1} \frac{1}{z} dz = 2\pi i \neq 0. \quad (15.6)$$

Значит, требование односвязности в теореме 15.1 существенно. Из формулы (15.6) следует, что, если проинтегрировать функцию $1/z$ по верхней и нижней полуокружностям, ведущим из точки $(-1,0)$ в $(1,0)$, результат будет различным (проделайте это вычисление, руководствуясь

примером 14.1). В то же время, деформируя окружность $|z|=1$ так, чтобы она не пересекала точку $z=0$ (в частности, изменяя ее радиус), мы будем получать все то же значение интеграла $2\pi i$. (В примере 14.1 уже отмечалось, что это значение не зависит от радиуса окружности $|z|=r$.) Если же проинтегрировать функцию $1/z$ по замкнутому контуру, не содержащему внутри себя точку $z=0$, то интеграл будет равен нулю.

§16. Неопределенный интеграл. Формула Ньютона-Лейбница

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в области D . Аналитическая в области D функция $F(z)$ называется **первообразной функции** $f(z)$, если $F'(z) = f(z)$ для всех точек z из D . Ясно, что если к первообразной $F(z)$ прибавить произвольную постоянную C , то снова получится первообразная $F(z) + C$. Покажем, что никаких других первообразных функция $f(z)$ не имеет, а именно: все первообразные функции $f(z)$ получаются из какой-либо одной первообразной $F(z)$ прибавлением произвольных постоянных C . Другими словами, любые две первообразные $F_1(z)$ и $F_2(z)$ одной и той же функции $f(z)$ отличаются друг от друга постоянным слагаемым. По определению первообразной, функции $F_1(z)$ и $F_2(z)$, а следовательно, и их разность $\varphi(z) = F_1(z) - F_2(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ аналитичны в области D , причем

$$\varphi'(z) = F_1'(z) - F_2'(z) = f(z) - f(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Отсюда получаем, что $\frac{\partial u}{\partial x} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial x} = 0$ и, следовательно, функции u и v не зависят от x . В силу условий Коши-Римана (6.4) также $\frac{\partial u}{\partial y} = 0$, $\frac{\partial v}{\partial y} = 0$. Значит, функции u и v не зависят и от y . Таким

образом, функции u , v , а вместе с ними и функция φ являются постоянными, и $F_1(z) = F_2(z) + C$.

Итак, множество всех первообразных функции $f(z)$ записывается в виде $F(z) + C$, где C – произвольная постоянная. Это множество называется *неопределенным интегралом* от $f(z)$ и обозначается $\int f(z)dz$. Таким образом,

$$\int f(z)dz = F(z) + C. \quad (16.1)$$

Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D . Возьмем две точки z_0 и z в D и рассмотрим интеграл

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\xi)d\xi, \quad (16.2)$$

вычисленный по какой-либо кривой, идущей от z_0 к z и лежащей в D . Поскольку область D односвязна, то интеграл не зависит от выбора пути интегрирования (следствие 15.3). Если точка z_0 фиксирована, то интеграл (16.2) зависит только от точки z и, следовательно, является в D однозначной функцией переменного z .

Теорема 16.1. Пусть функция $f(z)$ аналитична в односвязной области D и z_0 – некоторая фиксированная точка из D . Тогда функция $\Phi(z)$,

определенная равенством (16.2), также аналитична в D и является первообразной функции $f(z)$.

Доказательство. Возьмем в D произвольную точку z (рис.29). Функция f является аналитической, а следовательно, и непрерывной в z . Поэтому для любого $\varepsilon > 0$

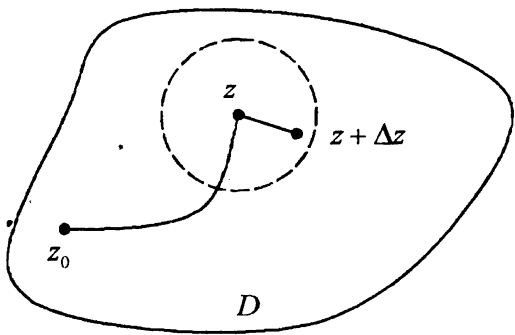


Рис.29

найдется такое $\delta > 0$, что окрестность точки z радиуса δ лежит в D и

$$|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon \quad \text{при} \quad |\xi - z| < \delta. \quad (16.3)$$

Дадим переменному z некоторое приращение Δz . Тогда функция $\Phi(z)$ получит приращение

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \Phi(z + \Delta z) - \Phi(z) = \int_{z_0}^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = \\ &= \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi + \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi - \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi = \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

В примере 14.2 было показано, что

$$\int_z^{z+\Delta z} 1 \cdot d\xi = (z + \Delta z) - z = \Delta z.$$

Используя это равенство, прибавляя и вычитая выражение $f(z)\Delta z$, получим

$$\begin{aligned} \Delta \Phi &= \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi - f(z)\Delta z + f(z)\Delta z = \int_z^{z+\Delta z} f(\xi) d\xi - f(z) \int_z^{z+\Delta z} d\xi + f(z)\Delta z = \\ &= \int_z^{z+\Delta z} (f(\xi) - f(z)) d\xi + f(z)\Delta z. \end{aligned}$$

Перенесем слагаемое $f(z)\Delta z$ влево и разделим обе части равенства на Δz :

$$\frac{\Delta \Phi}{\Delta z} - f(z) = \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\xi) - f(z)) d\xi.$$

В качестве пути интегрирования от z до $z + \Delta z$ выберем прямолинейный отрезок, соединяющий эти точки (рис.29). Воспользуемся теперь свойством 4° интеграла (§14) и неравенством (16.3):

$$\left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta z} - f(z) \right| = \left| \frac{1}{\Delta z} \int_z^{z+\Delta z} (f(\xi) - f(z)) d\xi \right| \leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} |f(\xi) - f(z)| ds \leq$$

$$\leq \frac{1}{|\Delta z|} \int_z^{z+\Delta z} \varepsilon ds = \frac{1}{|\Delta z|} \cdot \varepsilon \cdot |\Delta z| = \varepsilon.$$

Здесь $\int_z^{z+\Delta z} ds$ берется по длине кривой; он равен длине отрезка

$[z, z + \Delta z]$. Итак, для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что при $|\Delta z| < \delta$

$$\left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta z} - f(z) \right| < \varepsilon.$$

Это и означает, что существует предел

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta \Phi}{\Delta z} = f(z),$$

т.е. $\Phi'(z) = f(z)$. Теорема 16.1 доказана.

Следствие 16.2. Если $f(z)$ – аналитическая функция в односвязной области D , то справедлива формула Ньютона-Лейбница

$$\int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi = F(z_1) - F(z_0), \quad (16.4)$$

где $F(z)$ – любая первообразная функции $f(z)$, z_0 и z_1 – любые точки из D , и интегрирование ведется по произвольному пути, лежащему в D .

Доказательство. Пусть $F(z)$ – какая-либо первообразная функции $f(z)$. Поскольку функция $\Phi(z)$, определенная в (16.2), тоже первообразная для $f(z)$, то $F(z) = \Phi(z) + C$, т.е.

$$F(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi + C,$$

где C – некоторая постоянная. Положив в этом равенстве $z = z_0$, получим $F(z_0) = C$. Подставляя в ту же формулу $z = z_1$ и найденное значение C , имеем

$$F(z_1) = \int_{z_0}^{z_1} f(\xi) d\xi + F(z_0),$$

откуда следует (16.4).

Таким образом, определение первообразной и формула Ньютона-Лейбница для функций действительного переменного и для аналитических функций комплексного переменного полностью совпадают. Благодаря этому интегралы от элементарных функций комплексного переменного вычисляются с помощью тех же формул и методов, что и в действительном анализе. В частности, остается в силе известная таблица первообразных.

Пример 16.3. Найти интеграл $\int_0^{3i} z^2 dz$.

Решение.
$$\int_0^{3i} z^2 dz = \frac{z^3}{3} \Big|_0^{3i} = \frac{(3i)^3}{3} - 0 = -9i.$$

Формула Ньютона-Лейбница дает удобный способ вычисления интегралов. Однако следует помнить о границах применимости этой формулы: область аналитичности D функции $f(z)$ должна быть односвязной. В противном случае интеграл (16.2) может зависеть от пути интегрирования, и тогда определяемая им функция $\Phi(z)$ будет многозначной.

Для иллюстрации рассмотрим функцию $f(z) = 1/z$, аналитическую всюду, кроме изолированной особой точки $z = 0$. Пусть D – комплексная плоскость с выброшенными точками отрицательной полуоси. Это односвязная область, и главная ветвь логарифма

$$\ln z = \ln|z| + i \arg z \quad \text{при} \quad -\pi < \arg z \leq \pi$$

является в плоскости D первообразной функции $1/z$ (см. конец §11).

В D применима формула Ньютона-Лейбница, которая дает

$$\int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln \xi \Big|_1^z = \ln z = \ln|z| + i \arg z,$$

где интегрирование ведется по любой кривой, лежащей в D .

Рассмотрим теперь интеграл

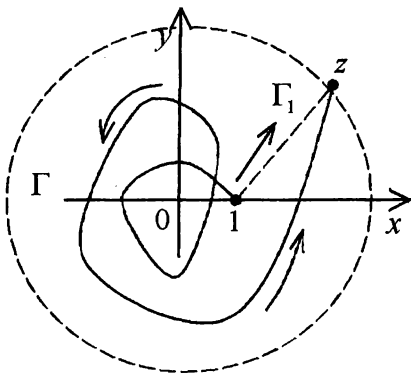


Рис.30

$$\Phi(z) = \int_1^z \frac{d\xi}{\xi} \quad (16.5)$$

вдоль произвольного пути Γ , соединяющего точку 1 с точкой z и не проходящего через 0 (рис.30). В частности, Γ может обходить точку $z=0$ любое (конечное) число раз. Пусть φ – угол между радиус-вектором точки $\xi \in \Gamma$ и осью OX . При $\xi=1$ $\varphi=0$. При движении точки ξ по пути Γ угол φ будет непрерывно

изменяться и достигнет значения $\arg z + 2\pi n$ (n равно числу обходов начала координат) в конечной точке z . Проведем вспомогательный путь Γ_1 из $\xi=1$ в $\xi=z$, лежащий в D (на рис.30 Γ_1 показан пунктиром). Пусть Γ_1^- – путь, совпадающий с Γ_1 , но проходимый в обратном направлении. При движении по Γ_1^- от z до 1 угол φ изменяется на $-\arg z$, а при движении по Γ от 1 до z – на $\arg z + 2\pi n$. Поэтому при движении от z до z по пути $\Gamma_1^- \cup \Gamma$ угол φ изменится на $2\pi n$. Отсюда следует, что путь $\Gamma_1^- \cup \Gamma$ можно непрерывно деформировать в n -кратно проходимую окружность, не задевая при деформировании точку 0 (на рис.30 эта окружность показана пунктиром, а $n=2$). Согласно формуле (15.6), при каждом обходе окружности интеграл от функции $1/\xi$ изменяется на $2\pi i$ (увеличивается или уменьшается в зависимости от направления обхода). Поэтому

$$\int_{\Gamma_1^- \cup \Gamma} \frac{d\xi}{\xi} = 2\pi n i.$$

Следовательно,

$$2\pi ni = \int_{\Gamma_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{\Gamma} \frac{d\xi}{\xi} = - \int_{\Gamma_1} \frac{d\xi}{\xi} + \int_{\Gamma} \frac{d\xi}{\xi} = -\ln z + \int_1^z \frac{d\xi}{\xi},$$

откуда получаем

$$\int_1^z \frac{d\xi}{\xi} = \ln z + 2\pi ni = \operatorname{Ln} z.$$

Таким образом, интеграл (16.5) дает многозначную функцию $\operatorname{Ln} z$.

§17. Интегральная формула Коши и ее следствия

Интегральная формула Коши выражает фундаментальное свойство аналитических функций. Оказывается, аналитическая функция $f(z)$ в замкнутой области $\bar{D}$ вполне определяется своими значениями на границе области: по граничным значениям такой функции можно восстановить ее значения всюду внутри области.

Теорема 17.1. Пусть $f(z)$ – аналитическая функция в замкнутой области $\bar{D}$ (односвязной или n -связной). Тогда значение функции $f(z)$ в любой внутренней точке $z \in D$ выражается через ее значения $f(\xi)$ в точках границы Γ по следующей интегральной формуле Коши:

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - z}. \quad (17.1)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольную внутреннюю точку $z \in D$ (рис.31). Пусть $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n$ – контуры, ограничивающие область D ; $\Gamma = \Gamma_1 \cup \dots \cup \Gamma_n$. Возьмем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как функция $f(z)$ непрерывна в точке z , то найдется окружность γ с центром в этой точке, лежащая в D и такая, что

$$|f(\xi) - f(z)| < \varepsilon \text{ для всех точек } \xi \in \gamma. \quad (17.2)$$

Обозначим через ρ радиус окружности γ ; можно считать, что и весь круг $|\xi - z| < \rho$ лежит в D . Направление обхода окружности γ зададим против часовой стрелки; через γ^- будем обозначать ту же окружность,

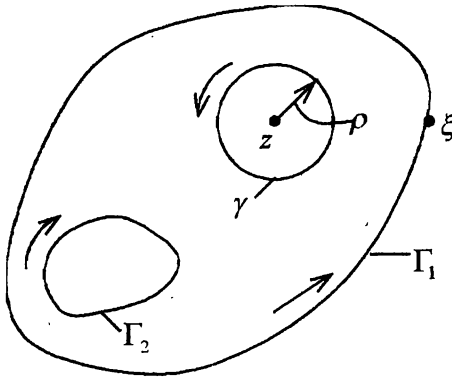


Рис.31

но с обходом в противоположном направлении (при движении по γ^- область D остается слева).

Рассмотрим функцию $\varphi(\xi) = \frac{f(\xi)}{\xi - z}$

комплексного переменного ξ . Она аналитична всюду в $\bar{D}$, за исключением точки $\xi = z$. В частности, $\varphi(\xi)$ аналитична в замкнутой

области $\bar{D}^*$, получаемой из $\bar{D}$ выбрасыванием круга $|\xi - z| < \rho$. Область $\bar{D}^*$ является $(n+1)$ -связной, ее граница состоит из контуров $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n, \gamma^-$. К функции $\varphi(\xi)$ и области $\bar{D}^*$ применим формулу (15.5), которая дает

$$\int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \dots + \int_{\Gamma_n} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \int_{\gamma^-} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 0,$$

откуда

$$\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\Gamma_1} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi + \dots + \int_{\Gamma_n} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi. \quad (17.3)$$

Воспользуемся теперь формулой (14.7), которая при $n = -1$ даст

$$1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{1}{\xi - z} d\xi. \text{ Домножая на постоянный множитель } f(z), \text{ получим}$$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi.$$

Разделим левую и правую части равенства (17.3) на $2\pi i$ и вычтем $f(z)$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi.$$

В силу свойства 4° интеграла (§14) и неравенства (17.2) получаем.

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - f(z) \right| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\pi} \int_{\gamma} \frac{|f(\xi) - f(z)|}{\rho} ds \leq \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{\varepsilon}{\rho} \cdot 2\pi\rho = \varepsilon.$$

Так как ε может быть выбрано сколь угодно малым, а левая часть в приведенных соотношениях не зависит от ε , то она равна нулю, и формула Коши (17.1) доказана.

Примечание. Формула Коши оказывается справедливой и в том случае, если функция $f(z)$ аналитична лишь *внутри* области D , но является непрерывной в замкнутой области $\overline{D}$. Мы не будем останавливаться на доказательстве этого обобщения.

Интегральная формула Коши имеет многочисленные важные применения.

Теорема 17.2. *Функция $f(z)$, аналитическая в замкнутой области*

$\overline{D}$, *имеет в каждой внутренней точке $z \in D$ производные всех порядков, которые выражаются по формулам Коши для производных:*

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^{n+1}} \quad \text{при } n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.4)$$

Таким образом, из существования в некоторой области D первой производной функции $f(z)$ следует существование всех ее производных! В частности, *производная аналитической функции также является аналитической функцией* (поскольку, в свою очередь, имеет производную). Это свойство существенно отличает дифференцируемые функции комплексного переменного от дифференцируемых функций действительного переменного.

Происхождение формулы (17.4) можно объяснить следующим образом. Продифференцируем обе части равенства (17.1) по z ; при дифференцировании по z функции $f(\xi)/(\xi - z)$, стоящей под знаком интеграла, величину ξ следует считать постоянной:

$$\left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right)'_z = \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2}; \quad \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right)''_z = \frac{2f(\xi)}{(\xi - z)^3}; \dots; \quad \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z} \right)^{(n)}_z = \frac{n! f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}.$$

Из формулы (17.1) и найденных производных получается (17.4). Но законность дифференцирования под знаком интеграла не обоснована. Поэтому для читателя, не удовлетворенного (и справедливо!) приведенным выше объяснением, мы даем полное доказательство.

Доказательство теоремы 17.2. Докажем формулу (17.4) вначале для $n = 1$. Зафиксируем произвольную внутреннюю точку $z \in D$. Пусть расстояние от z до границы Γ равно $\delta > 0$. Возьмем такое приращение Δz , что $|\Delta z| < \delta$. Тогда точка $z + \Delta z$ также находится внутри D и для нее справедлива формула Коши:

$$f(z + \Delta z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{\xi - (z + \Delta z)}.$$

Отсюда и из (17.1) получаем

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} &= \frac{f(z + \Delta z) - f(z)}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i \Delta z} \int_{\Gamma} \left(\frac{f(\xi)}{\xi - z - \Delta z} - \frac{f(\xi)}{\xi - z} \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)}. \end{aligned}$$

Чтобы доказать равенство (17.4) при $n = 1$, оценим разность между $\Delta f / \Delta z$ и правой частью (17.4):

$$\begin{aligned} \frac{\Delta f}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2} &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \left(\frac{1}{(\xi - z - \Delta z)(\xi - z)} - \frac{1}{(\xi - z)^2} \right) f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{\Delta z}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2 (\xi - z - \Delta z)}. \end{aligned}$$

Функция $f(\xi)$ является аналитической, а значит, непрерывной и ограниченной на Γ . Поэтому найдется такое число M , что $|f(\xi)| < M$ при $\xi \in \Gamma$. Так как $|\xi - z| \geq \delta$, то

$$|\xi - z - \Delta z| \geq |\xi - z| - |\Delta z| \geq \delta - |\Delta z|,$$

поэтому

$$\left| \frac{\Delta f}{\Delta z} - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2} \right| \leq \frac{|\Delta z|}{2\pi} \cdot \frac{M}{\delta^2 (\delta - |\Delta z|)} \int_{\Gamma} ds = \frac{ML|\Delta z|}{2\pi \delta^2 (\delta - |\Delta z|)},$$

где L – длина границы Γ . При $\Delta z \rightarrow 0$ правая часть стремится к нулю. Значит, предел отношения $\Delta f / \Delta z$ при $\Delta z \rightarrow 0$ существует, и

$$f'(z) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta f}{\Delta z} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z)^2}. \quad (17.5)$$

Итак формула (17.4) при $n = 1$ доказана. Применяя формулу (17.5)

к оценке отношения $\frac{f'(z + \Delta z) - f'(z)}{\Delta z}$ и проводя аналогичные

выкладки, приходим к (17.4) при $n = 2$ и так далее. Теорема 17.2 доказана.

Примечание. Любую гармоническую функцию в односвязной области D можно рассматривать как действительную часть аналитической в D функции (см. §7). Поэтому, согласно теореме 17.2, гармоническая функция имеет частные производные всех порядков, и эти производные, в свою очередь, являются гармоническими функциями.

Теорема 17.3 (теорема о среднем). Пусть функция $f(z)$ аналитична в замкнутом круге $|z - z_0| \leq R$ радиуса R с центром z_0 . Тогда ее значение в центре круга z_0 равно среднему арифметическому ее значений на окружности $|z - z_0| = R$, т.е.

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\varphi}) d\varphi. \quad (17.6)$$

Доказательство. Применим формулу Коши (17.1) в частном случае, когда $\bar{D}$ – замкнутый круг $|z - z_0| \leq R$, а Γ – его граница $|\xi - z_0| = R$. Для точек границы имеем следующие соотношения:

$\xi = z_0 + R \cdot e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $d\xi = iR \cdot e^{i\varphi} d\varphi$. Формула (17.1) дает

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f(z_0 + R \cdot e^{i\varphi})}{R \cdot e^{i\varphi}} \cdot iR \cdot e^{i\varphi} d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + R \cdot e^{i\varphi}) d\varphi,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 17.4 (неравенства Коши для производных аналитической функции). Если $f(z)$ – аналитическая функция в замкнутом круге $|z - z_0| \leq R$, то все ее производные в точке z_0 удовлетворяют неравенству:

$$|f^{(n)}(z_0)| \leq \frac{Mn!}{R^n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots \quad (17.7)$$

где M – максимум модуля функции $f(\xi)$ на окружности $|\xi - z_0| = R$.

Доказательство. Применяя формулу (17.4), получим

$$|f^{(n)}(z_0)| = \left| \frac{n!}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(\xi) d\xi}{(\xi - z_0)^{n+1}} \right| \leq \frac{n!}{2\pi} \cdot \frac{M}{R^{n+1}} \cdot 2\pi R = \frac{Mn!}{R^n},$$

и нужные неравенства получены.

Теорема 17.5 (теорема Лиувилля). Если функция $f(z)$ является аналитической и ограниченной во всей комплексной плоскости C , то $f(z)$ тождественно равна постоянной.

Доказательство. Так как $f(z)$ ограничена в C , то найдется такое число $M > 0$, что $|f(z)| \leq M$ для всех $z \in C$. Возьмем произвольную точку $z_0 \in C$, и пусть Γ – окружность $|\xi - z_0| = R$ с радиусом R и центром z_0 . Из формулы (17.7) при $n=1$ получаем

$$|f'(z_0)| \leq \frac{M}{R}.$$

Заметим, что в качестве R здесь можно взять любое

положительное число. Устремляя R к бесконечности, получим $|f'(z_0)| = 0$. Значит, $f'(z_0) = 0$ в любой точке z_0 плоскости C . Отсюда следует, что $f(z) = C$, и теорема Лиувилля доказана.

Если $f(z)$ аналитична в односвязной области D , то, согласно теореме 15.1 Коши, интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому-контуре, лежащему в D , равен нулю. Следующая теорема показывает, что справедливо и обратное утверждение.

Теорема 17.6 (теорема Морера). Пусть однозначная функция $f(z)$

непрерывна в односвязной области D и интеграл от $f(z)$ по любому замкнутому контуру, лежащему в D , равен нулю. Тогда $f(z)$ – аналитическая функция в D .

Доказательство. Зафиксируем некоторую точку $z_0 \in D$ и возьмем произвольную точку $z \in D$. Поскольку для любого замкнутого контура Γ , лежащего в D , $\int_{\Gamma} f(z) dz = 0$, то интеграл

$$\Phi(z) = \int_{z_0}^z f(\xi) d\xi \quad (17.8)$$

не зависит от пути, идущего от z_0 к z и лежащего в D (этот факт доказывается точно так же, как и следствие 15.3). Поэтому интеграл (17.8) определяет однозначную функцию $\Phi(z)$ переменного $z \in D$. Без изменения повторяя рассуждение из доказательства теоремы 16.1, получим, что $\Phi(z)$ является аналитической функцией в D и $\Phi'(z) = f(z)$. Но производная аналитической функции есть также аналитическая функция (см. теорему 17.2). Тем самым аналитичность функции $f(z)$ доказана.

Интегральная формула Коши (17.1) и формула (17.4) применяются для вычисления интегралов по замкнутым контурам, охватывающим особые точки функции $f(z)$.

Пример 17.7. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{z^2 + 4} dz$, где Γ – окружность с центром i радиуса 2.

Решение. Поскольку $z^2 + 4 = (z - 2i)(z + 2i)$, то подынтегральная функция имеет две особые точки $\pm 2i$, причем точка $2i$ лежит внутри контура Γ . Представим интеграл в виде

$$\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{(z-2i)(z+2i)} dz = \int_{\Gamma} \frac{\left(\frac{\sin z}{z+2i} \right)}{z-2i} dz.$$

Функция $f(z) = \frac{\sin z}{z+2i}$ является аналитической в замкнутом круге, ограниченном контуром Γ . Поэтому применима формула (17.1), в которой $z = 2i$, а переменная ξ обозначена через z :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\left(\frac{\sin z}{z+2i} \right)}{z-2i} dz &= \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{z-2i} = 2\pi i f(2i) = 2\pi i \frac{\sin(2i)}{2i+2i} = \\ &= \frac{\pi}{2} \sin(2i) = \frac{\pi}{2} \cdot \frac{e^{-2} - e^2}{2i} = i \frac{\pi}{4} (e^2 - e^{-2}). \end{aligned}$$

Пример 17.8. Вычислить интеграл $\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{(z-2)^4}$ по окружности $|z| = 3$.

Решение. Точка 2 находится внутри круга $|z| < 3$, а функция $f(z) = e^z$ аналитична в замкнутом круге $|z| \leq 3$ (она аналитична даже во всей плоскости C). По формуле (17.4) при $n = 3$ имеем

$$\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{(z-2)^4} = \int_{\Gamma} \frac{f(z) dz}{(z-2)^4} = \frac{2\pi i}{3!} f'''(2) = \frac{2\pi i}{3!} e^2 = \frac{i\pi}{3} e^2.$$

ЗАДАНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ

1. Составьте логическую схему базы знаний по теме юниты и перечень основных зависимостей и формул.

2. Решите самостоятельно следующие задачи.

Вариант 1

1) Найти все значения корня $\sqrt[4]{\frac{-1+i\sqrt{3}}{2}}$.

2) Изобразить множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих равенству $|z-1-i|=|z+3-3i|$.

3) Найти множество точек, в которых функция $w = z \operatorname{Im} z$ является дифференцируемой, и вычислить производную в этих точках (если таковые существуют).

4) Найти функцию, отображающую треугольник с вершинами $(0;0)$, $(-1;2)$, $(1;2)$ в треугольник с вершинами $(2;0)$, $(6;2)$, $(6;-2)$.

5) Найти все значения $(1+i)^i$.

6) Проверить, является ли функция $f(z) = z \sin z$ аналитической в C , и в случае положительного ответа найти первообразную этой функции в C , удовлетворяющую условию $F(0) = 0$.

7) Используя теорему Коши или формулы Коши для производных, найти интеграл $\int_{\Gamma} \frac{\cos z dz}{z^2 - \pi^2}$ по замкнутому контуру $\Gamma: |z - \pi| = 1$ (обход контура против часовой стрелки).

Вариант 2

1) Число $(-1-i\sqrt{3})^6$ представить в декартовой форме.

2) Изобразить область, заданную неравенствами $|z-i| < 2$, $\operatorname{Im} z > 2$.

3) Найти множество точек, в которых функция $w = z \operatorname{Re} z$ является дифференцируемой, и вычислить производную в этих точках (если таковые существуют).

4) В какую область переходит круг $|z-i| < 1$ при отображении $w = 1/z$?

5) Найти все значения функции $\operatorname{Arcsin} 2i$.

6) Проверить, является ли функция $f(z) = ze^z$ аналитической в C , и в случае положительного ответа найти первообразную этой функции

в C , удовлетворяющую условию $F(0) = 0$.

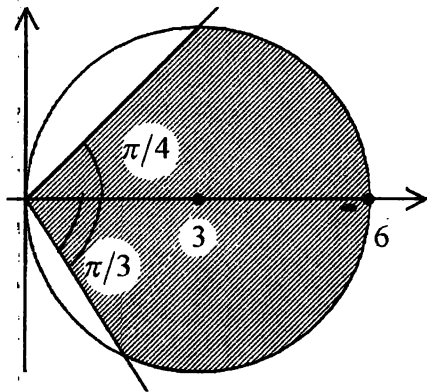
7) Используя теорему Коши или формулы Коши для производных,

найти интеграл $\int_{\Gamma} \frac{e^z dz}{z^2 + 1}$ по замкнутому контуру $\Gamma: |z - i| = 1$ (обход контура против часовой стрелки).

Вариант 3

1) Найти все решения уравнения $z^6 - 9z^3 + 8 = 0$.

2) Замкнутую область, изображенную на рисунке, задать системой неравенств.



3) Найти множество точек, в которых функция $w = z(z + 2 \operatorname{Re} z)$ является дифференцируемой, и вычислить производную в этих точках (если таковые существуют).

4) Найти конформное отображение $w = f(z)$ круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$, удовлетворяющее условиям $w(1/2) = 0$, $\arg w'(1/2) = \pi/2$.

Указать коэффициент растяжения в точке $z_0 = 1/2$.

5) Найти все значения функции $\operatorname{Arctg} \frac{2-i}{5}$.

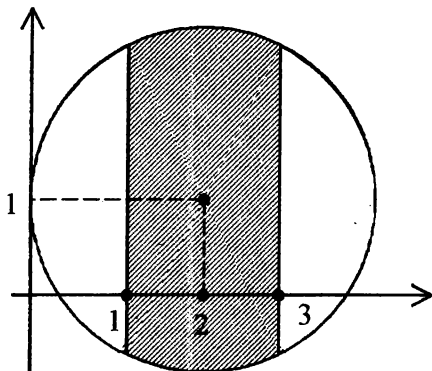
6) Проверить, является ли функция $f(z) = ze^{z^2+2}$ аналитической в C , и в случае положительного ответа найти первообразную этой функции в C , удовлетворяющую условию $F(i\sqrt{2}) = 0$.

7) Используя теорему Коши или формулы Коши для производных, найти интеграл $\int_{\Gamma} \frac{\sin z}{(z-1)^3} dz$ по замкнутому контуру $\Gamma: |z|=2$ (обход контура против часовой стрелки).

Вариант 4

1) Найти все решения уравнения $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$.

2) Замкнутую область, изображенную на рисунке, задать системой неравенств.



3) Найти множество точек, в которых функция $w = (\bar{z} + 1)z$ является дифференцируемой, и вычислить производную в этих точках (если таковые существуют).

4) В какую область переходит круг $|z - i| < 2$ при отображении $w = 1/z$?

5) Найти все значения функции $\text{Arcos}(-5)$.

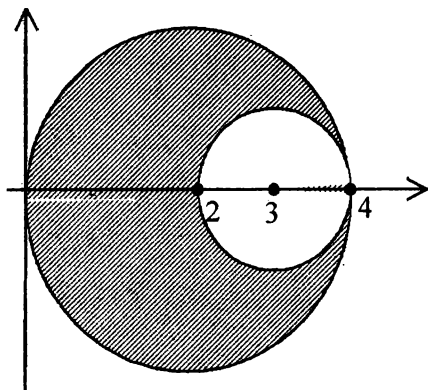
6) Проверить, является ли функция $f(z) = (z+2)(z^2 + 4z + 3)^3$ аналитической в C , и в случае положительного ответа найти первообразную этой функции в C , удовлетворяющую условию $F(0) = 0$.

7) Используя теорему Коши или формулы Коши для производных, найти интеграл $\int_{\Gamma} \frac{z^3 + 1}{(z+1)^4} dz$ по замкнутому контуру $\Gamma: |z|=3$ (обход контура против часовой стрелки).

Вариант 5

1) Представить в декартовой форме число $\frac{e^{i\pi/4}}{(1-3i)^2}$.

2) Замкнутую область, изображенную на рисунке, задать системой неравенств.



3) Найти множество точек, в которых функция $w = (z+1)\bar{z}$ является дифференцируемой, и вычислить производную в этих точках (если таковые существуют).

4) Найти конформное отображение $w = f(z)$ верхней полуплоскости на круг $|w| < 1$, удовлетворяющее условиям $w(i) = 0, \arg w'(i) = -\pi/2$. Указать коэффициент растяжения в точке $z_0 = i$.

5) Найти все значения функции $\operatorname{Arcctg} \frac{2\sqrt{3}+3i}{7}$.

6) Проверить, является ли функция $f(z) = z \cos 2z$ аналитической в $\mathbb{C}$, и в случае положительного ответа найти первообразную этой функции в $\mathbb{C}$, удовлетворяющую условию $F(0) = 0$.

7) Используя теорему Коши или формулы Коши для производных, найти интеграл $\int_{\Gamma} \frac{z \sin z}{(z+\pi/2)^2} dz$ по замкнутому контуру $\Gamma: |z| = 4$ (обход контура против часовой стрелки).

ТРЕНИНГ УМЕНИЙ

1. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 1

Задание

Выполните арифметические действия над комплексными числами

$$\sqrt[3]{\frac{(2-2i)^4 + 72 + 4i}{(1-2i)^2 + 5i}}. \text{ Изобразите найденные числа на комплексной}$$

плоскости.

Решение

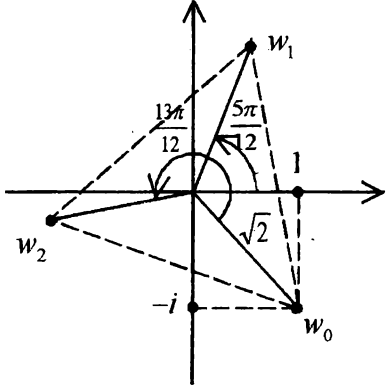
Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритмы	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Определить порядок действий по обычным правилам: сначала действия возведения в степень, затем умножения и деления, потом – сложения и вычитания; при наличии скобок вначале выполняются действия в скобках	1. Возведение в степень $(2-2i)^4, (1-2i)^2$. 2. Сложение $(2-2i)^4 + 72 + 4i, (1-2i)^2 + 5i$. 3. Деление числителя на знаменатель. 4. Извлечение кубического корня. 5. Изображение найденных чисел на комплексной плоскости.
2.	Число $z = x + iy$, которое возводится в степень или из которого извлекается корень, представить в тригонометрической форме, используя формулы: $r = z = \sqrt{x^2 + y^2}$, $\cos \varphi = x/r, \sin \varphi = y/r$	$z = 2 - 2i$; $r = z = \sqrt{2^2 + (-2)^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$, $\cos \varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sin \varphi = -\frac{1}{\sqrt{2}}$; следовательно, φ лежит в 4 четверти, $\varphi = -\frac{\pi}{4}$. Отсюда $z = 2 - 2i =$ $= 2\sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{4} \right) \right)$.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
3.	Возвести в степень или извлечь корень n-й степени, применив формулы Муавра (2.8), (2.10) (при возведении в квадрат или куб удобнее применять алгебраические формулы сокращенного умножения)	$(2-2i)^4 = (2\sqrt{2})^4 \left(\cos\left(-\frac{4\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{4\pi}{4}\right) \right) = 64(-1+i0) = -64;$ $(1-2i)^2 = 1-4i+(2i)^2 =$ $= 1-4i-4 = -3-4i.$
4	Выполнить сложение и вычитание чисел в алгебраической форме.	$(2-3i)^4 + 72 + 4i = -64 + 72 + 4i =$ $= 8 + 4i;$ $(1-2i)^2 + 5i = -3-4i+5i = -3+i.$
5.	Выполнить умножение и деление чисел либо в тригонометрической, либо в алгебраической форме. При делении чисел в алгебраической форме следует домножить числитель и знаменатель дроби на число, сопряженное знаменателю	$\frac{8+4i}{-3+i} = \frac{(8+4i)(-3-i)}{(-3+i)(-3-i)} =$ $= \frac{-24-12i-8i+4}{(-3)^2+1} = \frac{-20-20i}{10} =$ $= -2-2i.$
6.	Извлечь кубический корень, применив формулу Муавра (2.10) (см.пп.2,3). Ответ записать в алгебраической либо в тригонометрической форме	$z = -2-2i;$ $r = z = \sqrt{(-2)^2 + (-2)^2} =$ $= \sqrt{8} = 2\sqrt{2};$ $\cos \varphi = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}},$ $\sin \varphi = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{1}{\sqrt{2}};$ следовательно, φ лежит в 3-й четверти,

5-503
3-4
8-35-34
-3-24
2-3-5-16

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
		$\varphi = -\frac{3\pi}{4} \text{ (можно взять } \varphi = \frac{5\pi}{4} \text{);}$ $z = 2\sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \right)^4$ По формуле (2.10) $w = \sqrt[3]{z} = \sqrt[3]{2\sqrt{2}} \left(\cos \frac{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} + \right.$ $\left. + i \sin \frac{-\frac{3\pi}{4} + 2\pi k}{3} \right), k = 0, 1, 2.$ Так как $\sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, то при $k = 0$, $w_0 = \sqrt{2} \left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \right) =$ $= 1 - i;$ $k = 1,$ $w_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{12} + i \sin \frac{5\pi}{12} \right);$ $k = 2,$ $w_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{13\pi}{12} + i \sin \frac{13\pi}{12} \right).$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
7.	Изобразить найденные числа на комплексной плоскости	 Точки w_0, w_1, w_2 расположены в вершинах правильного треугольника с центром в начале координат.

Решите самостоятельно следующие задачи:

1. Выполните арифметические действия над комплексными

числами: $\sqrt[4]{\frac{(1+\sqrt{3}i)^6 - 60 + 2i}{(2-i)^3 - 6 + 9i}}$. Изобразите найденные числа на комплексной плоскости.

2. Выполните арифметические действия над комплексными

числами: $\sqrt[6]{\frac{(2+3i)^2 - (2-3i)^2}{48(\bar{1}+i)^{10}}}$. Изобразите найденные числа на комплексной плоскости.

3. Выполните арифметические действия над комплексными

числами: $\sqrt[2]{\frac{(2-i)^2-3}{(-1+i)^8}}$. Изобразите найденные числа на комплексной плоскости.

4. Выполните арифметические действия над комплексными

числами: $\sqrt[3]{\frac{(1-2i)^3 + (1+2i)^3}{44(1+i)}}$. Изобразите найденные числа на комплексной плоскости.

5. Выполните арифметические действия над комплексными

числами: $\sqrt[3]{\frac{3 \cdot (2 + 2i)^5}{(1 + 3i)^2 + 14}}$. Изобразите найденные числа на комплексной плоскости.

2. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 2

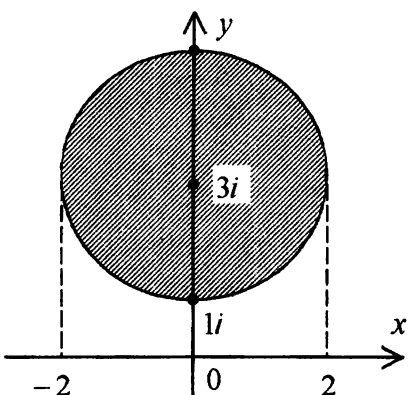
Задание

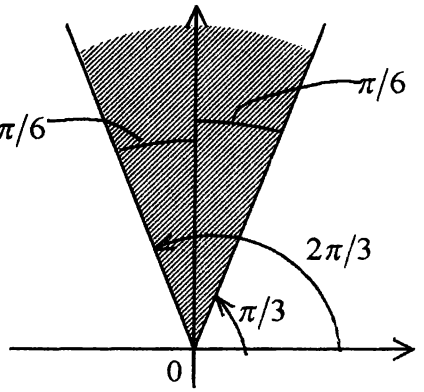
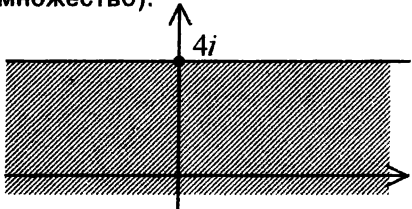
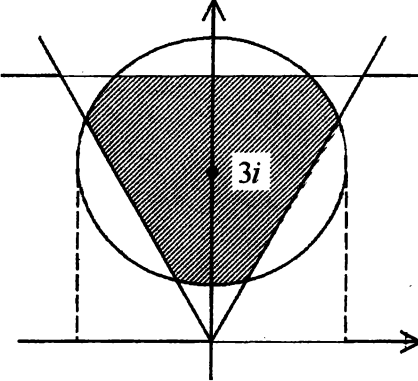
Изобразите на комплексной плоскости область, заданную системой

$$\text{неравенств } |z - 3i| < 2, \left| \arg z - \frac{\pi}{2} \right| < \frac{\pi}{6} \text{ при } \operatorname{Im} z < 4.$$

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Изобразить множество $ z - z_0 < R$. Это множество таких точек z , расстояние от которых до точки z_0 не превосходит R , т.е. круг с центром z_0 и радиусом R (граница круга не принадлежит множеству)	$ z - 3i < 2$; $z_0 = 3i$; $R = 2$. 
2.	Изобразить множество $\varphi_1 < \arg z < \varphi_2$ – сектор, ограниченный лучами, идущими под углом φ_1 и φ_2 к оси OX (сами лучи не входят в множество)	Неравенство $\left \arg z - \frac{\pi}{2} \right < \frac{\pi}{6}$ равносильно соотношениям $-\frac{\pi}{6} < \arg z - \frac{\pi}{2} < \frac{\pi}{6}, \text{ или } \frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{2\pi}{3}.$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
		
3.	Изобразить множество $x_1 < \operatorname{Re} z < x_2, y_1 < \operatorname{Im} z < y_2$	Множество $\operatorname{Im} z < 4$ является полуплоскостью, лежащей под прямой $y = 4$ (эта прямая не входит в множество). 
4	Найти пересечение этих множеств	 Искомое множество является треугольником со "скругленными" углами. Граница не входит в множество.

Решите самостоятельно следующие задачи:

1. Изобразите на комплексной плоскости область, заданную системой неравенств $|z-4| < 4$, $|z-2| > 2$, $|\arg z| < \pi/4$.

2. Изобразите на комплексной плоскости область, заданную системой неравенств $|z + 1 - i| < 1$, $|\arg z + \pi/4| < \frac{\pi}{6}$.

3. Изобразите на комплексной плоскости область, заданную системой неравенств $|z - 3 - 3i| < 2$, $2 < \operatorname{Re} z < 4$, $\operatorname{Im} z > 3$.

4. Изобразите на комплексной плоскости область, заданную системой неравенств $|z - 1 + i| < 2$, $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$, $\operatorname{Im} z > -1$.

5. Изобразите на комплексной плоскости область, заданную системой неравенств $|z - 2i| < 3$, $|z + 2i| < 3$, $|\operatorname{Im} z| < 0$.

3. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 3

Задание

Восстановите аналитическую функцию по ее действительной части

$$u(x, y) = e^{-y} \sin x + y \text{ и значению } f(0) = 1.$$

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Проверить, что заданная функция в самом деле является действительной частью аналитической функции. С этой целью подставить u в уравнение Лапласа $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$	$\frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y} \cos x, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -e^{-y} \sin x;$ $\frac{\partial u}{\partial y} = -e^{-y} \sin x + 1, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = e^{-y} \sin x;$ $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -e^{-y} \sin x + e^{-y} \sin x = 0. \text{ Функция } u(x, y) \text{ удовлетворяет уравнению Лапласа во всей плоскости.}$
2.	Используя условия Коши-Римана, найти $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$	$\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x} = e^{-y} \cos x,$ $\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = e^{-y} \sin x - 1.$
3.	Интегрируя равенство для $\frac{\partial v}{\partial x}$ по переменной x, найти $v(x, y)$ (при этом y считается постоянной)	$v(x, y) = \int (e^{-y} \sin x - 1) dx =$ $= e^{-y} \int \sin x dx - \int 1 \cdot dx =$ $= -e^{-y} \cos x - x + C(y), \text{ где } C(y) - \text{неизвестная функция переменной } y.$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
4	Подставить найденную функцию $v(x, y)$ в уравнение $\frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\partial u}{\partial x}$ и найти $C'(y)$	$\frac{\partial v}{\partial y} = e^{-y} \cos x + C'(y) = e^{-y} \cos x$, $C'(y) = 0$.
5.	Найти $C(y)$, проинтегрировав $C'(y)$ по y . При этом $C(y)$ найдется с точностью до постоянного слагаемого C_1	$C(y) = \int C'(y) dy = \int 0 dy = C_1$.
6.	Записать $f(z)$ в виде $u(x, y) + iv(x, y) + C_1$ и найти C_1 из условия $f(z_0) = w_0$	$f(z) = e^{-y} \sin x + y + i(-e^{-y} \cos x - x + C_1);$ $1 = f(0) = 0 + 0 + i(-1 + 0 + C_1);$ $1 = -i + iC_1; C_1 = \frac{1+i}{i} = 1 - i;$ $f(z) = e^{-y} \sin x + y + i(-e^{-y} \cos x - x) + 1 + i, \text{ или}$ $f(z) = -ie^{-y}(\cos x + i \sin x) - i(x + iy) + 1 + i = -ie^{-y+ix} - i(x + iy) + 1 + i = -ie^{i(x+iy)} - i(x + iy) + 1 + i = -ie^{iz} - iz + 1 + i.$

Решите самостоятельно следующие задачи:

1. Восстановите аналитическую функцию по ее действительной части $u(x, y) = x^2 - y^2 + x$ и значению $f(0) = 0$.

2. Восстановите аналитическую функцию по ее мнимой части

$v(x, y) = e^x \cos y$ и значению $f(0) = 1 + i$.

Примечание. Восстановление аналитической функции по ее мнимой части проводится по аналогичному алгоритму. Соответствующий пример был разобран в §7 (пример 7.3).

3. Восстановите аналитическую функцию по ее мнимой части $v = 2xy + 2x$ и значению $f(0) = 0$.

4. Восстановите аналитическую функцию по ее действительной части

$u = x^3 - 3xy^2 + 1$ и значению $f(0) = 1$.

5. Восстановите аналитическую функцию по ее мнимой части $v = 3x^2y - y^3$ и значению $f(0) = 1$.

4. Пример выполнения упражнения тренинга на

тема 4

Задание

Вычислите интеграл от функции $f(z) = \bar{z}^2$ по кривой Γ , являющейся ломаной ABC , где $A(-1;0)$, $B(0;1)$, $C(1;0)$.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1.	Задать кривую уравнением вида $z = z(t) = x(t) + iy(t)$, $\alpha \leq t \leq \beta$. Если кривая состоит из нескольких участков, задаваемых разными уравнениями, то рассмотреть каждый участок отдельно	Кривая состоит из двух отрезков AB и BC . Участок AB можно задать уравнением $y = x + 1$, $-1 \leq x \leq 0$, или, в параметрической форме, $x(t) = t$, $y(t) = t + 1$, $-1 \leq t \leq 0$, т.е. $z(t) = t + i(t + 1)$, $-1 \leq t \leq 0$. Участок BC задается уравнением $y = -x + 1$, $0 \leq x \leq 1$. Параметрическими уравнениями отрезка BC являются $x(t) = t$, $y(t) = -t + 1$, $0 \leq t \leq 1$, или $z(t) = t + i(-t + 1)$.
2.	Найти производную $z'(t) = x'(t) + iy'(t)$	Для AB $z'(t) = 1 + i$. Для BC $z'(t) = 1 - i$.
3.	Найти интеграл по кривой Γ по формуле $\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\alpha}^{\beta} f(z(t)) z'(t) dt =$	Для AB $\int_{\Gamma_1} \bar{z}^2 dz = \int_{\Gamma_1} (x - iy)^2 dz =$ $= \int_{\Gamma_1} (x^2 - y^2 - 2ixy) dz =$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
	$= \int_{\alpha}^{\beta} (u(x(t), y(t)) +$ $+ iv(x(t), y(t))) (x'(t) +$ $+ iy'(t)) dt.$ Для этого рас- крыть скобки, перейти к сум- ме интегралов и вычислить каждый из них. Прodelать аналогичные вычисления для каждого из участков кри- вой	$= \int_{-1}^0 (t^2 - (t+1)^2 - 2it(t+1))(1+i) dt =$ $= \int_{-1}^0 (2t^2 - 1 + i(-2t^2 - 4t - 1)) dt =$ $= \left(\frac{2t^3}{3} - t + i \left(-\frac{2t^3}{3} - 2t^2 - t \right) \right) \Big _{-1}^0 =$ $= -\frac{1}{3} + \frac{i}{3}.$ Для BC $\int_{\Gamma_2} \bar{z}^2 dz = \int_{\Gamma_2} (x^2 - y^2 - 2ixy) dz =$ $= \int_0^1 (t^2 - (1-t)^2 - 2it(1-t))(1-i) dt =$ $= \int_0^1 (2t^2 - 1 + i(2t^2 - 4t + 1)) dt =$ $= \left(\frac{2t^3}{3} - t + i \left(\frac{2t^3}{3} - 2t^2 + t \right) \right) \Big _0^1 =$ $= -\frac{1}{3} - \frac{i}{3}.$
4	Сложить полученные значе- ния интегралов для каждого из участков кривой	$\int_{\Gamma} f(z) dz = \int_{\Gamma_1} f(z) dz + \int_{\Gamma_2} f(z) dz =$ $= -\frac{1}{3} + \frac{i}{3} - \frac{1}{3} - \frac{i}{3} = +\frac{2}{3}.$

Решите самостоятельно следующие задачи:

1. Вычислите интеграл от функции $f(z) = \bar{z}^2$ по кривой Γ , являющейся: а) ломаной $AOBC$, где $A(-1;0), O(0;0), B(0;1), C(1;0)$; б) отрезком AC . Если результаты получились разными, то почему? (Заметим, что все три ломаные – $AOBC$, AC и ABC , рассмотренная выше, – являются путями, ведущими из A в C .)

2. Вычислите интеграл от функции $f(z) = z^2$ по кривой Γ , являющейся: а) ломаной ABC ; б) ломаной $AOBC$; в) отрезком AC . Координаты точек A, O, B, C даны в предыдущей задаче. Обязаны ли интегралы по всем трем кривым совпадать (ответ обосновать)? Как вычислить данный интеграл более простым способом?

3. Вычислите интеграл от функции $f(z) = \bar{z}^2$ по верхней полуокружности $\Gamma: |z| < 1, \operatorname{Im} z \geq 0$. Направление движения – по часовой стрелке (таким образом, Γ является еще одним путем, ведущими из A в C).

Примечание. Окружность $|z - z_0| < r$ задается следующими параметрическими уравнениями: $x(t) = x_0 + r \cos t$, $y(t) = y_0 + r \sin t$, где $z_0 = x_0 + iy_0$ – центр окружности, t – угол между осью OX и вектором $\overline{z_0 z}$, идущем из z_0 в точку z , движущуюся по окружности.

4. Вычислите интеграл $\int_{\Gamma} z|z|dz$, где $\Gamma: |z|=1, \operatorname{Im} z \leq 0$ (обход – против часовой стрелки).

5. Вычислите интеграл $\int_{\Gamma} z \operatorname{Re} z dz$, где кривая Γ является:
- а) отрезком AB с $A(0;0), B(2;4)$; б) дугой параболы $y = x^2$, $0 \leq x \leq 2$.

5. Пример выполнения упражнения тренинга на умение 5

Задание

Найдите конформное отображение полосы, заключенной между прямыми $y = x + 1$ и $y = x + 3$, на единичный круг.

Решение

Предварительно заполните таблицу, подобрав к каждому алгоритму конкретное соответствие из данного задания.

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
1	Отобразить данную полосу на полосу $-\infty < x < \infty$, $0 < y < \pi$ с помощью линейной функции $w = az + b$	Данная полоса имеет ширину $\sqrt{2}$. Чтобы отобразить ее в полосу шириной π, сделаем преобразование подобия с коэффициентом $\frac{\pi}{\sqrt{2}}$. Точка $A(-1/2; i/2)$ перейдет в $A_1(-\frac{\pi}{2\sqrt{2}}; \frac{\pi}{2\sqrt{2}})$. Преобразование подобия задается функцией $w_1 = \frac{\pi}{\sqrt{2}}z$. Затем повернем полученную полосу на угол $\pi/4$ по часовой стрелке, чтобы она стала параллельной оси OX. Это преобразование запишется в виде

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
		$w_2 = w_1 \cdot e^{-i\pi/4} = \frac{\pi z}{\sqrt{2}} \cdot e^{-i\pi/4} \quad \text{Точка}$ A_1 перейдет в $A_2(0; \pi/2)$. Наконец сделаем параллельный перенос на вектор $\overline{A_2O}$: $w_3 = w_2 - \frac{i\pi}{2} = \frac{\pi z}{\sqrt{2}} e^{-i\pi/4} - \frac{i\pi}{2}.$ Вместо точки $A(-1/2; i/2)$ можно было взять любую другую точку на прямой $y = x + 1$ (например, точку $(0; 1)$). Используя равенство $e^{-i\pi/4} = 1/\sqrt{2} - i/\sqrt{2}$, можно записать полученное преобразование в такой форме: $w_3 = \frac{\pi(1-i)}{2} z - \frac{i\pi}{2}.$
2.	Отобразить полученную полосу на верхнюю полуплоскость с помощью функции $w = e^z$	В §11 было показано, что показательная функция $w = e^z$ отображает полосу $0 < \text{Im } z < \pi$ на верхнюю полуплоскость. Поэтому нужным преобразованием будет $w_4 = e^{w_3}$.
3.	Отобразить верхнюю полуплоскость на единичный круг с помощью дробно-линейного отображения $w = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}, \text{Im } z_0 > 0$	Поскольку никаких дополнительных условий не задано, то параметры φ и z_0 с $\text{Im } z_0 > 0$ можно выбрать произвольно. Например, возьмем $\varphi > 0, z_0 = i$. Тогда получим $w = \frac{w_4 - i}{w_4 + i}$

№ п/п	Алгоритм	Конкретное соответствие задания предложенному алгоритму
4.	Составить композицию указанных выше отображений	$w = \frac{w_4 - i}{w_4 + i} = \frac{e^{w_3} - i}{e^{w_3} + i} =$ $= \frac{e^{\pi(1-i)z/2 - i\pi/2} - i}{e^{\pi(1-i)z/2 - i\pi/2} + i}.$

Решите самостоятельно следующие задачи:

1. Найдите конформное отображение полосы $-1 < \operatorname{Im} z < 3$ на единичный круг.

2. Найдите конформное отображение полосы $1 < \operatorname{Re} z < 3$ на единичный круг.

3. Найдите конформное отображение полосы, заключенной между прямыми $y = -x, y = -x + \pi$, на единичный круг.

4. Найдите конформное отображение полосы $-\pi < \operatorname{Re} z < 3\pi$ на единичный круг.

5. Найдите конформное отображение полосы, заключенной между прямыми $y = \sqrt{3}x$ и $y = \sqrt{3}x + \pi$ на единичный круг.

Примеры отработки решения задач

1. Комплексные числа и действия над ними

Данной теме посвящена глава 1 тематического обзора, где изложен теоретический материал и решены задачи и примеры. Поэтому перед решением примеров следует изучить материал главы 1.

Пример 1. Число $(\sqrt{3} - i)^7$ представить в декартовой форме.

Решение. Напомним, что декартовой (алгебраической) формой комплексного числа называется выражение $z = x + iy$.

1) Представим число $z = \sqrt{3} - i$ в тригонометрической форме. Для этого найдем модуль r и аргумент φ этого числа.

$$r = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + (-1)^2} = \sqrt{3+1} = 2;$$

$$\cos \varphi = \frac{x}{r} = \frac{\sqrt{3}}{2}; \quad \sin \varphi = \frac{-1}{2} = -\frac{1}{2}, \text{ откуда следует, что } \varphi \text{ лежит в}$$

четвертой четверти. Поэтому $\varphi = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$. Можно взять любое

из этих значений φ .

$$\text{Итак, } \sqrt{3} - i = 2 \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right).$$

2) По формуле Муавра (2.8) найдем z^7 :

$$\begin{aligned} z^7 &= r^7 \left(\cos \left(-\frac{7\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{7\pi}{6} \right) \right) = 2^7 \left(-\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \\ &= 2^7 \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) = 64(-\sqrt{3} + i). \end{aligned}$$

Пример 2. Найти все значения $\sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}}$.

Решение. 1) Найдем модуль и аргумент числа $z = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$:

$$r = \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1;$$

$\cos \varphi = -\frac{1}{2}$, $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, φ лежит в III четверти, и

$$\varphi = -\frac{2\pi}{3} + 2\pi k, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

2) Применим формулу (2.10); в качестве φ можно взять любое из найденных значений, например, $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$. Получим

$$\begin{aligned} \sqrt[4]{\frac{-1-i\sqrt{3}}{2}} &= \sqrt[4]{1} \left(\cos \frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} + i \sin \frac{-\frac{2\pi}{3} + 2\pi k}{4} \right) = \\ &= \cos \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} + \frac{\pi}{2}k \right) \text{ при } k = 0, 1, 2, 3. \end{aligned}$$

Подставляя каждое из указанных значений k , найдем искомое значение корня:

$$w_0 = \cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) = \frac{\sqrt{3}}{2} - i\frac{1}{2};$$

$$w_1 = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}; \quad w_2 = \cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} = -\frac{\sqrt{3}}{2} + i\frac{1}{2};$$

$$w_3 = \cos \frac{4\pi}{3} + i \sin \frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}. \text{ Другие значения } k \text{ новых чисел}$$

w_k уже не дадут.

Пример 3. Найти все решения уравнения $z^6 + 28z^3 + 27 = 0$.

Решение. Уравнение имеет шесть корней (возможно, среди них есть совпадающие). Сделаем замену переменной $z^3 = t$:

$$t^2 + 28t + 27 = 0; D = 676 = 26^2; t_1 = -27, t_2 = -1.$$

Найдем значения z . При $t_1 = -27$ имеем $z^3 = -27$. Для аргумента φ получаем $\cos \varphi = -1, \sin \varphi = 0$. Поэтому $\varphi = \pi$, и $t_1 = -27 = 27(\cos \pi + i \sin \pi)$. По формуле (2.10)

$$z = \sqrt[3]{t_1} = \sqrt[3]{27} \left(\cos \frac{\pi + 2\pi k}{3} + i \sin \frac{\pi + 2\pi k}{3} \right) \text{ при } k = 0, 1, 2.$$

$$\text{Отсюда} \quad z_1 = 3 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} \right) = \frac{3}{2} + i \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (k=0);$$

$$z_2 = 3(\cos \pi + i \sin \pi) = -3 \quad (k=1);$$

$$z_3 = 3 \left(\cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} \right) = \frac{3}{2} - i \frac{3\sqrt{3}}{2} \quad (k=2).$$

При $t_2 = -1$ будет $r=1, \varphi=\pi$. Аналогично получаем

$$z_4 = 1 \left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{4} \right) = \frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2};$$

$$z_5 = -1;$$

$$z_6 = \frac{1}{2} - i \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Итак, все корни уравнения оказались различными.

Пример 4. Найти все решения уравнения $z^4 - 2z^2 + 4 = 0$.

Решение. Уравнение имеет четыре корня. Сделав замену переменной $t = z^2$, приходим к уравнению $t^2 - 2t + 4 = 0$. Дискриминант

$$D = 4 - 16 = -12; t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2} = \frac{2 \pm i2\sqrt{3}}{2} = 1 \pm i\sqrt{3}.$$

Найдем z . Для $t_1 = 1 + i\sqrt{3}$ получим $r = |t_1| = \sqrt{1+3} = 2$; $\cos \varphi = \frac{1}{2}$,

$\sin \varphi = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $\varphi = \frac{\pi}{3}$, и

$$z = \sqrt{t_1} = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2} + i \sin \frac{\frac{\pi}{3} + 2\pi k}{2} \right) \text{ при } k = 0, 1.$$

Отсюда
$$z_1 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{\pi}{6} + i \sin \frac{\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \quad (k = 0);$$

$$z_2 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{7\pi}{6} + i \sin \frac{7\pi}{6} \right) = -\sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right) \quad (k = 1).$$

Аналогично рассматривается случай t_2 . При этом $|t_2| = 2$, $\varphi = -\frac{\pi}{3}$,

$$z_3 = \sqrt{2} \left(\cos \left(-\frac{\pi}{6} \right) + i \sin \left(-\frac{\pi}{6} \right) \right) = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - i \frac{1}{2} \right);$$

$$z_4 = \sqrt{2} \left(\cos \frac{5\pi}{6} + i \sin \frac{5\pi}{6} \right) = \sqrt{2} \left(-\frac{\sqrt{3}}{2} + i \frac{1}{2} \right).$$

Пример 5. Представить в декартовой форме число $z = \frac{6e^{i\pi/3}}{(3-2i)^2}$.

Решение. По формуле Эйлера (2.12)

$$6e^{i\pi/3} = 6\left(\cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3}\right) = 6\left(\frac{1}{2} + i \frac{\sqrt{3}}{2}\right) = 3(1+i\sqrt{3});$$

$$(3-2i)^2 = 9 - 2 \cdot 6i + (2i)^2 = 9 - 12i - 4 = 5 - 12i;$$

$$z = \frac{3(1+i\sqrt{3})}{5-12i} = 3 \frac{(1+i\sqrt{3})(5+12i)}{(5-12i)(5+12i)} = 3 \frac{(5-12\sqrt{3})+i(12+5\sqrt{3})}{25+144} =$$

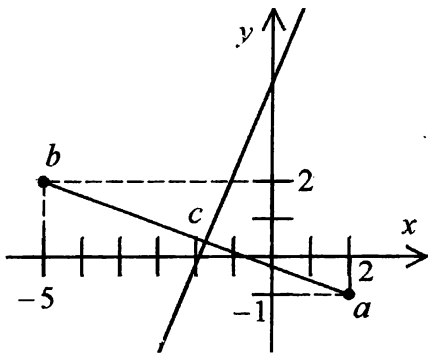
$$= \frac{3(5-12\sqrt{3})}{169} + i \frac{3(12+5\sqrt{3})}{169}.$$

2. Понятие функции комплексного переменного

Теоретический материал, необходимый для решения задач данного раздела, изложен в главе 2 тематического обзора. Следует прочесть эту главу перед решением задач.

Пример 6. Изобразить множество точек z комплексной плоскости, удовлетворяющих равенству $|z-2+i| = |z+5-2i|$.

Решение. Поскольку $|z-z_0|$ равно расстоянию между точками



z и z_0 , то данное равенство означает следующее: требуется найти точки z , равноудаленные от точек $a=2-i$ и $b=-5+2i$. Известно, что множество точек, равноудаленных от a и b , представляет собой прямую, перпендикулярную отрезку ab и проходящую через середину c этого отрезка (т.е. срединный перпендикуляр). Так как

координаты середины отрезка равны полусумме соответствующих координат его концевых точек, то $c = \frac{2-5}{2} + i \frac{-1+2}{2} = -\frac{3}{2} + i \frac{1}{2}$. Итак,

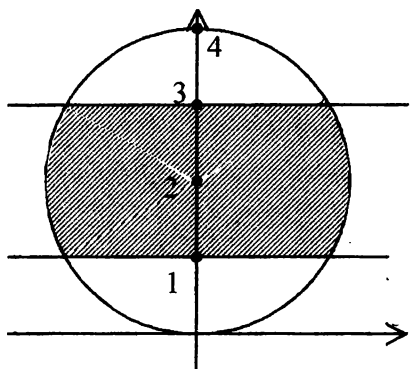
искмое множество есть прямая, проходящая через точку $c = -\frac{3}{2} + i\frac{1}{2}$

перпендикулярно отрезку ab .

Пример 7. Изобразить область, заданную неравенствами

$$|z - 2i| < 2; \quad 1 < \operatorname{Im} z < 3.$$

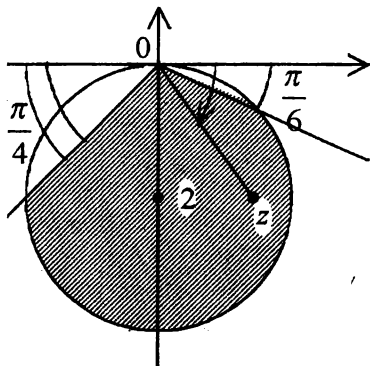
Решение. Неравенство $|z - 2i| < 2$ означает, что точка z удалена



от точки $z_0 = 2i$ на расстояние, меньше чем 2. Поэтому множество точек z , для которых $|z - 2i| < 2$, является внутренностью круга с центром $2i$ радиуса 2. Условие $1 < \operatorname{Im} z < 3$ говорит о том, что координата y точки z заключена между 1 и 3. Множество таких точек z образует полосу, лежащую между горизонтальными прямыми $y = 1$ и $y = 3$. Искомое множество является

пересечением круга и полосы; граница не входит в заштрихованное множество.

Пример 8. Замкнутую область, изображенную на рисунке, задать системой неравенств.



Решение. Точки указанной области лежат в замкнутом круге с центром $z_0 = -2i$ радиуса 2. Поэтому они

удовлетворяют неравенству $|z + 2i| \leq 2$.

Кроме того, эти точки лежат внутри сектора с вершиной в начале координат, что накладывает условие на их аргументы. Удобно пользоваться главным значением аргумента, для которого $-\pi < \arg z \leq \pi$.

Для точек данной области $\arg z$ будет

отсчитываться от оси Ox по часовой стрелке и, следовательно, является

отрицательным: $-3\pi/4 \leq \arg z \leq -\pi/6$. Итак, нужными неравенствами являются $|z + 2i| \leq 2$; $-3\pi/4 \leq \arg z \leq -\pi/6$.

3. Дифференцирование функций комплексного переменного

Перед тем, как решать следующие далее задачи, необходимо изучить теоретический материал, изложенный в главе 3, и разобрать приведенные в этой главе примеры.

Пример 9. Найти множество точек, в которых функция $w = z(\bar{z} - 3\operatorname{Im} z)$ является дифференцируемой, и вычислить производную в этих точках (если таковые существуют).

Решение. Представим данную функцию $w = f(z)$ в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$. Для этого подставим $z = x + iy$ и выделим действительную и мнимую части полученного выражения:

$$f(z) = (x + iy)(x - iy - 3y) = x^2 + y^2 - 3xy - i3y^2$$

(Мы воспользовались равенствами $\bar{z} = x - iy$, $\operatorname{Im} z = y$). Таким образом, $u(x, y) = x^2 + y^2 - 3xy$, $v(x, y) = -3y^2$.

Согласно теореме 6.1, для дифференцируемости функции $f(z)$ в точке $z = (x, y)$ необходимо и достаточно, чтобы в этой точке выполнялись условия Коши-Римана (6.4). Найдем частные производные:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x - 3y; \quad \frac{\partial v}{\partial y} = -6y; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 2y - 3x; \quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0.$$

Условия (6.4) приводят к системе уравнений

$$\begin{cases} 2x - 3y = -6y \\ 2y - 3x = 0 \end{cases}, \text{ или } \begin{cases} 2x + 6y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases}.$$

Эта система имеет единственное решение $x = 0, y = 0$. Итак, функция $f(z)$ дифференцируема в единственной точке $z = 0$. Для отыскания производной $f'(0)$ достаточно найти частную производную либо по x , либо по y в точке $z = 0$ (в силу дифференцируемости

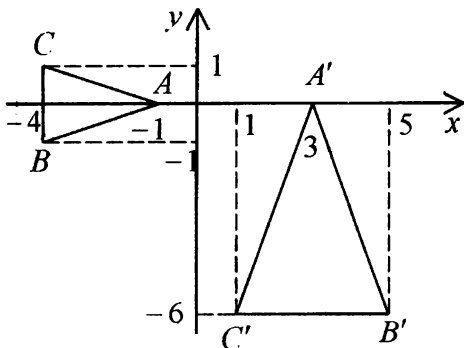
функции $f(z)$ значения этих производных должны быть равны друг другу):

$$f'(0) = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{(0,0)} + i \frac{\partial v}{\partial x} \Big|_{(0,0)} = (2x - 3y) \Big|_{(0,0)} + i0 = 0.$$

4. Конформные отображения

Решение следующих далее задач основано на теоретическом материале, изложенном в главах 3 и 4 тематического обзора. Следует изучить этот материал и приведенные в этих главах примеры.

Пример 10. Найти функцию, отображающую треугольник с вершинами $(-1;0)$, $(-4;-1)$, $(-4;1)$ в треугольник с вершинами $(3;0)$, $(5;-6)$, $(1;-6)$.



Решение. Треугольник ABC можно отобразить на треугольник $A'B'C'$ последовательным выполнением растяжения, поворота и параллельного переноса. Поэтому такое отображение реализуется линейной функцией $w = az + b$.

1) Подберем преобразование подобия. Так как коэффициент подобия треугольников равен 2, то

нужное преобразование есть $w_1 = 2z$. Точка $A(-1;0)$ перейдет в $A_1(-2;0)$.

2) Повернем получившийся треугольник относительно начала координат на угол $\pi/2$ против часовой стрелки. Это преобразование запишется в виде $w_2 = w_1 \cdot e^{i\pi/2}$. Точка $A_1(-2;0)$ перейдет в $A_2(0;-2)$.

3) Сделаем параллельный перенос получившегося треугольника на вектор $\overline{A_2A'} = (3;2) = 3 + 2i$: $w = w_2 + 3 + 2i$.

Композиция указанных преобразований дает искомое отображение:

$$w = w_2 + 3 + 2i = e^{i\pi/2} w_1 + 3 + 2i = 2e^{i\pi/2} z + 3 + 2i,$$

$$w = 2e^{i\pi/2} z + 3 + 2i.$$

Пример 11. В какую область переходит круг $|z+2i| < 2$ при отображении $w = 1/z$?

Решение. Определим вначале, во что переходит граница круга, т.е. окружность $|z+2i| = 2$. Согласно круговому свойству дробно-линейных отображений (теорема 9.4), эта окружность переходит в окружность (возможно, с радиусом $R = \infty$, т.е. в прямую). Точка $z = 0$ лежит на окружности $|z+2i| = 2$; она переходит в $w = \infty$. Поэтому $R = \infty$ и, следовательно, окружность $|z+2i| = 2$ переходит в прямую. Чтобы ее изобразить, достаточно найти две точки на этой прямой. При $z_1 = -4i$ получим $w_1 = 1/(-4i) = i/4$; при $z_2 = 2 - 2i$ будет $w_2 = \frac{1}{(2-2i)} = \frac{1}{4} + \frac{i}{4}$.

Итак, образ окружности $|z+2i| = 2$ есть прямая, проходящая через точки $w_1 = i\frac{1}{4}$ и $w_2 = \frac{1}{4} + i\frac{1}{4}$, т.е. горизонтальная прямая $y = \frac{1}{4}$. Поэтому образом круга $|z+2i| < 2$ будет одна из полуплоскостей (верхняя либо нижняя), ограниченная этой прямой.

Чтобы понять, какой из случаев имеет место, достаточно проверить, в какую полуплоскость отображается какая-либо внутренняя точка круга, например, центр $z_0 = -2i$: $w_0 = 1/z_0 = -1/(2i) = i/2$. Поскольку центр отображается в точку w_0 , лежащую выше прямой $y = 1/4$, то приходим к выводу: круг $|z+2i| < 2$ отображается на полуплоскость $\text{Im } z > 1/4$.

Образ границы $|z+2i| = 2$ можно было найти и другим способом, описанным в следующем примере.

Пример 12. В какую область переходит круг $|z+i| < 3$ при отображении $w = 1/z$?

Решение. Найдем образ окружности $|z+i| = 3$. Поскольку $z = 0$

не принадлежит окружности, то ни одна из ее точек не перейдет в $w = \infty$.
 Значит, образом будет окружность конечного радиуса. Для отыскания
 ее центра и радиуса представим уравнение $|z+i|=3$ в виде
 $|x+i(y+1)|=3$, или $x^2+(y+1)^2=9$, $x^2+y^2+2y-8=0$.

Равенство $w = 1/z$ дает $z = 1/w$, или

$$x+iy = \frac{1}{u+iv} = \frac{u-iv}{u^2+v^2},$$

откуда $x = \frac{u}{u^2+v^2}$, $y = -\frac{v}{u^2+v^2}$. Подставим эти выражения в
 уравнение окружности:

$$\frac{1}{u^2+v^2} - \frac{2v}{u^2+v^2} - 8 = 0; \quad 8(u^2+v^2) + 2v - 1 = 0;$$

$$u^2+v^2 + \frac{1}{4}v - \frac{1}{8} = 0.$$

Дополним выражение $v^2 + \frac{1}{4}v$ до полного квадрата:

$$u^2+v^2 + \frac{1}{4}v + \left(\frac{1}{8}\right)^2 - \frac{1}{8} + \left(\frac{1}{8}\right)^2 = 0; \quad u^2 + \left(v + \frac{1}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}.$$

Итак, окружность $|z+i|=3$ переходит в окружность с центром

$w_0 = \left(0; -\frac{1}{8}\right)$ и радиусом $R = 3/8$. Точка $z = 0$, лежащая внутри круга

$|z+i| < 3$, переходит в точку $w = \infty$. Значит, при отображении $w = 1/z$

круг $|z+i| < 3$ переходит во внешность круга с центром $w_0 = -i/8$ и

радиусом $R = \frac{3}{8}$, т.е. в множество $\left|w + \frac{i}{8}\right| > \frac{3}{8}$.

Пример 13. Найти конформное отображение $w = f(z)$ круга $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$, удовлетворяющее условиям $w(-i/2) = 0$, $\arg w'(-i/2) = \pi/4$. Указать коэффициент растяжения в точке $z_0 = -i/2$.

Решение. В примере 9.8 было показано, что дробно-линейная функция, отображающая круг $|z| < 1$ на круг $|w| < 1$, имеет вид

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{1 - \bar{z}_0 z}$$

(формула 9.10)), где z_0 – точка, переходящая в точку $w = 0$. В нашем случае $z_0 = -i/2$. Осталось определить значение φ , которое найдем из условия $\arg w'(-i/2) = \pi/4$:

$$w'(z) = e^{i\varphi} \frac{1 \cdot (1 - \bar{z}_0 z) - (-\bar{z}_0)(z - z_0)}{(1 - \bar{z}_0 z)^2} = e^{i\varphi} \frac{1 - \bar{z}_0 z_0}{(1 - \bar{z}_0 z)^2}.$$

Учитывая, что $\bar{z}_0 z_0 = |z_0|^2$ при $z_0 = -i/2$, получаем

$$w'(z_0) = e^{i\varphi} \frac{1 - |z_0|^2}{(1 - |z_0|^2)^2} = e^{i\varphi} \frac{1}{1 - |z_0|^2};$$

$$w'(-i/2) = e^{i\varphi} \frac{1}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{4}{3} e^{i\varphi}.$$

Отсюда следует, что $|w'(-i/2)| = 4/3$, $\arg w'(-i/2) = \varphi$. Значит, коэффициент растяжения в точке $-i/2$ равен $4/3$ и $\varphi = \pi/4$. Искомым отображением является функция

$$w = e^{i\pi/4} \frac{z + i/2}{1 - i/2 z} = e^{i\pi/4} \frac{z + i/2}{1 + i z/2}$$

(мы использовали равенство $\bar{i} = -i$).

Пример 14. Найти конформное отображение верхней полуплоскости на круг $|w| < 1$, удовлетворяющее условиям $w(2i) = 0$, $\arg w'(2i) = \pi$. Указать коэффициент растяжения в точке $z_0 = 2i$.

Решение. Нужное отображение было получено в примере 9.7, оно имеет вид

$$w = e^{i\varphi} \frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0}.$$

Определим параметры z_0 и φ . Поскольку z_0 — точка, переходящая в точку $w = 0$, то $z_0 = 2i$. Для отыскания φ найдем $w'(z_0)$:

$$w'(z_0) = e^{i\varphi} \frac{1 \cdot (z - \bar{z}_0) - 1 \cdot (z - z_0)}{(z - \bar{z}_0)^2} = e^{i\varphi} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z - \bar{z}_0)^2};$$

$$w'(z_0) = e^{i\varphi} \frac{z_0 - \bar{z}_0}{(z_0 - \bar{z}_0)^2} = e^{i\varphi} \frac{1}{z_0 - \bar{z}_0}.$$

$$\text{Поэтому } w'(2i) = \frac{e^{i\varphi}}{2i + 2i} = \frac{e^{i\varphi}}{4i} = -\frac{ie^{i\varphi}}{4} = \frac{1}{4} e^{i\pi} \cdot e^{i\pi/2} \cdot e^{i\varphi} = \frac{1}{4} e^{i(3\pi/2 + \varphi)},$$

так как $-1 = e^{i\pi}$, $i = e^{i\pi/2}$. Отсюда $|w'(2i)| = \frac{1}{4}$, $\arg w'(2i) = 3\pi/2 + \varphi$,

$\pi = 3\pi/2 + \varphi$, $\varphi = -\pi/2$.

Итак, искомое отображение дается функцией

$$w = e^{-i\pi/2} \frac{z - 2i}{z + 2i} = -i \frac{z - 2i}{z + 2i}.$$

Коэффициент растяжения в точке $2i$ равен $|w'(2i)| = 1/4$.

Пример 15. Найти все значения $(-\sqrt{3} + i)^{-6i}$.

Решение. Согласно определению общей степенной функции (см. §12), $(-\sqrt{3} + i)^{-6i} = e^{-6i \operatorname{Ln}(-\sqrt{3} + i)}$.

Значения логарифма найдем по формуле (11.5):

$$\operatorname{Ln}(-\sqrt{3} + i) = \ln|-\sqrt{3} + i| + i(\arg(-\sqrt{3} + i) + 2\pi k);$$

$$|-\sqrt{3}+i|=\sqrt{(-\sqrt{3})^2+1}=2; \cos \varphi=-\frac{\sqrt{3}}{2}; \sin \varphi=\frac{1}{2},$$

где $\varphi = \arg(-\sqrt{3}+i)$. Поэтому φ лежит во второй четверти.

Следовательно, $\varphi = \frac{5\pi}{6}$. Получаем

$$\begin{aligned} (-\sqrt{3}+i)^{-6i} &= e^{-6i(\ln 2 + i(5\pi/6 + 2\pi k))} = e^{5\pi + 12\pi k - i6\ln 2} = \\ &= e^{5\pi + 12\pi k} (\cos(6\ln 2) - i \sin(6\ln 2)), \quad k \in \mathbb{Z}. \end{aligned}$$

Примечание. Мы получили, что данная степень $(-\sqrt{3}+i)^{-6i}$ имеет бесконечное множество значений. Все эти значения лежат на одном луче, идущем под углом $\theta = -6\ln 2$ к оси OX . Модули этих значений образуют две геометрические прогрессии с первым членом $b_1 = e^{5\pi}$ и знаменателями $q = e^{12\pi}$ при $k = 1, 2, 3, \dots$, и $q = e^{-12\pi}$ при $k = -1, -2, -3, \dots$

Пример 16. Найти все значения функции $\text{Arc cos}(-5i)$.

Решение. По формуле (12.3)

$$\begin{aligned} \text{Arc cos}(-5i) &= i\text{Ln}(-5i + \sqrt{(-5i)^2 - 1}) = i\text{Ln}(-5i + \sqrt{-26}) = \\ &= i\text{Ln}(-5i \pm i\sqrt{26}) = i\text{Ln}(i(-5 \pm \sqrt{26})). \end{aligned}$$

Мы пишем “ $\pm$ ” перед $\sqrt{26}$, поскольку под корнем из положительного числа обычно понимается арифметическое значение корня, в то время как под корнем в формуле (12.3) подразумевается двузначная функция. Рассмотрим каждый из знаков перед корнем отдельно.

$$|i(-5 + \sqrt{26})| = \sqrt{26} - 5 = (\sqrt{26} + 5)^{-1}, \quad \arg(i(-5 + \sqrt{26})) = \frac{\pi}{2}.$$

(Мы воспользовались равенством $(\sqrt{26} - 5)(\sqrt{26} + 5) = 1$). По формуле (11.5)

$$i\text{Ln}(i(-5 + \sqrt{26})) = i \ln(\sqrt{26} - 5) - \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = -i \ln(\sqrt{26} + 5) - \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right),$$

$k \in \mathbb{Z}$.

Аналогично,

$$|i(-5 - \sqrt{26})| = \sqrt{26} + 5, \arg(-i(\sqrt{26} + 5)) = -\frac{\pi}{2},$$

$$i \operatorname{Ln}(-i(\sqrt{26} + 5)) = i \ln(\sqrt{26} + 5) - \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right) = i \ln(\sqrt{26} + 5) + \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$$

(Мы пишем $+2\pi k$ вместо $-2\pi k$, поскольку k пробегает все множество целых чисел). Окончательно получаем

$$\operatorname{Arc} \cos(-5i) = \pm \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k + i \ln(\sqrt{26} + 5) \right) \text{ при } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Примечание. Можно было рассмотреть только один случай и воспользоваться общим замечанием, сделанным в §12, согласно которому изменение знака перед корнем приводит к изменению знака перед логарифмом

$$\operatorname{Ln}(z + \sqrt{z^2 - 1}).$$

Пример 17. Найти все значения функции $\operatorname{Arctg} \frac{-2\sqrt{3} + 3i}{3}$.

Решение. По формуле (12.4) при $z = \frac{-2\sqrt{3} + 3i}{3}$ имеем

$$\operatorname{Arctg} z = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{i - z}{i + z} = \frac{1}{2i} \operatorname{Ln} \frac{2\sqrt{3}}{-2\sqrt{3} + 6i};$$

$$\frac{2\sqrt{3}}{-2\sqrt{3} + 6i} = \frac{1}{-1 + \sqrt{3}i} = \frac{-1 - \sqrt{3}i}{4};$$

$$\left| \frac{-1 - \sqrt{3}i}{4} \right| = \frac{1}{4} |1 + \sqrt{3}i| = \frac{1}{2};$$

$$\arg \frac{-1 - \sqrt{3}i}{4} = \varphi = -\frac{2\pi}{3}.$$

Равенство для φ следует из того, что $\sin \varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos \varphi = -\frac{1}{2}$.

Отсюда получаем

$$\begin{aligned}\operatorname{Arctg} \frac{-2\sqrt{3}+3i}{3} &= \frac{1}{2i} \left(\ln \frac{1}{2} + i \left(-\frac{2\pi}{3} + 2\pi n \right) \right) = \\ &= -\frac{\pi}{3} + \pi n + \frac{1}{2i} \ln \frac{1}{2} = -\frac{\pi}{3} + \pi n + \frac{i}{2} \ln 2, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\end{aligned}$$

5. Интегрирование функций комплексного переменного

Прежде чем приступить к решению следующих задач, следует изучить теоретический материал и примеры, изложенные в главе 5 тематического обзора.

Пример 18. Проверить, является ли функция $f(z) = z \sin 5z$ аналитической в $\mathbb{C}$, и в случае положительного ответа найти первообразную этой функции в $\mathbb{C}$, удовлетворяющую условию $F(\pi/2) = 0$.

Решение. Проверку аналитичности функции $f(z)$ можно сделать двумя способами. Первый способ состоит в том, что $f(z)$ представляется в виде $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$, т.е. выделяется действительная и мнимая части функции $f(z)$. После этого вычисляются частные производные функций $u(x, y)$ и $v(x, y)$ и показывается, что условия Коши-Римана (6.4) выполняются для любых x и y . Второй способ (более простой) основан на использовании свойств аналитических функций (§6).

Функция e^z является аналитической в $\mathbb{C}$ (это доказано в §11); функции $5iz$ и $-5iz$, очевидно, также аналитические. Поэтому и сложные функции e^{i5z} и e^{-i5z} аналитичны в $\mathbb{C}$. Отсюда следует, что и функция

$$f(z) = z \sin 5z = \frac{z}{2i} (e^{i5z} - e^{-i5z})$$

будет аналитической в $\mathbb{C}$ как разность и произведение аналитических функций. Теперь заметим, что нужная первообразная $F(z)$ дается

формулой

$$F(z) = \int_{\pi/2}^z \xi \sin 5\xi d\xi,$$

где интеграл берется по любому пути, идущему от $\pi/2$ к z .

Действительно, согласно теореме 16.1, функция $F(z)$ будет первообразной; равенство $F(\pi/2) = 0$ очевидно. Интеграл вычисляется по формуле Ньютона-Лейбница (16.4). При этом, как отмечалось в §16, можно пользоваться обычными приемами и формулами интегрирования. В данном случае воспользуемся методом интегрирования по частям:

$$\int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du.$$

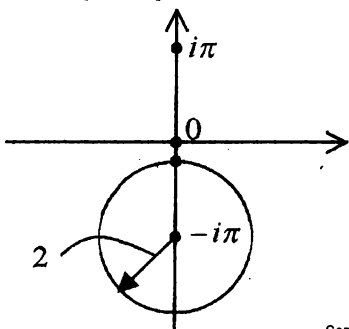
$$\text{Здесь } u = \xi, \quad du = d\xi, \quad dv = \sin 5\xi d\xi, \quad v = -\frac{1}{5} \cos 5\xi.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \int_{\pi/2}^z \xi \sin 5\xi d\xi &= \xi \cdot \left(-\frac{1}{5}\right) \cos 5\xi \Big|_{\pi/2}^z - \int_{\pi/2}^z \left(-\frac{1}{5}\right) \cos 5\xi d\xi = \\ &= -\frac{\xi}{5} \cos 5\xi \Big|_{\pi/2}^z + \frac{1}{25} \sin 5\xi \Big|_{\pi/2}^z = -\frac{z}{5} \cos 5z + 0 + \frac{1}{25} \sin 5z - \frac{1}{25}; \end{aligned}$$

$$F(z) = -\frac{z}{5} \cos 5z + \frac{1}{25} \sin 5z - \frac{1}{25}.$$

Пример 19. Используя теорему Коши или формулы Коши для



производных, найти интеграл $\int_{\Gamma} \frac{\cos 2z}{z^2 + \pi^2} dz$

по замкнутому контуру $\Gamma: |z + i\pi| = 2$ (обход контура против часовой стрелки).

Решение. Уравнение $z^2 + \pi^2 = 0$ имеет решения $z = \pm i\pi$. Поэтому подынте-

ральная функция имеет две особые точки $\pm i\pi$, причем точка $-i\pi$ лежит внутри контура Γ – окружности с центром $-i\pi$ и радиуса 2, а точка $i\pi$ лежит вне Γ . Разложим знаменатель $z^2 + \pi^2$ на множители: $z^2 + \pi^2 = (z + i\pi)(z - i\pi)$ и представим интеграл в виде

$$\int_{\Gamma} \frac{\cos 2z dz}{z^2 + \pi^2} = \int_{\Gamma} \frac{\left(\frac{\cos 2z}{z - i\pi} \right) dz}{z + i\pi}.$$

Функция $f(z) = \frac{\cos 2z}{z - i\pi}$ является аналитической в замкнутом круге, ограниченном контуром Γ . Поэтому применима формула (17.1), в которой $z = -i\pi$, а переменная ξ обозначена через z :

$$\begin{aligned} \int_{\Gamma} \frac{\left(\frac{\cos 2z}{z - i\pi} \right) dz}{z + i\pi} &= \int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i f(-i\pi) = 2\pi i \frac{\cos(-2\pi i)}{-\pi i - \pi i} = \\ &= -\cos 2\pi i = -\frac{1}{2} \left(e^{2\pi^2} + e^{-2\pi^2} \right) = -\frac{1}{2} \left(e^{-2\pi} + e^{2\pi} \right). \end{aligned}$$

Пример 20. Используя теорему Коши или формулы Коши для производных, найти интеграл $\int_{\Gamma} \frac{z^5 - 2z^4 + 3}{(z - i)^4} dz$ по замкнутому контуру

$\Gamma: |z| = 5$ (обход контура против часовой стрелки).

Решение. Обозначим $f(z) = z^5 - 2z^4 + 3$. Функция $f(z)$ аналитична в замкнутом круге $|z| \leq 5$ (Она аналитична даже во всей плоскости C). Точка $z = i$ лежит внутри этого круга. Поэтому применима формула Коши для производных (17.4), в которой $z = i$, $n = 3$:

$$\int_{\Gamma} \frac{z^5 - 2z^4 + 3}{(z-i)^4} dz = \int_{\Gamma} \frac{f(z)dz}{(z-i)^4} = \frac{2\pi i}{3!} f'''(i) =$$

$$= \frac{2\pi i}{6} (60i^2 - 48i) = 2\pi i(-10 - 8i) = 4\pi(4 - 5i).$$

(Мы воспользовались тем, что $f'(z) = 5z^4 - 8z^3$, $f''(z) = 20z^3 - 24z^2$, $f'''(z) = 60z^2 - 48z$).

